Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

27. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

21 Aralık 2019

Çözümler

1. a ve n pozitif tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere

$$2a^2 + 3a - 44 = 3p^n$$

denklemini sağlayan tüm (a, n, p) üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(5, 1, 7)$, $(7, 2, 5)$ ve $(23, 2, 19)$.

Öncelikle $2a^2 + 3a - 44 = (2a + 11)(a - 4)$ olduğunu gözlemleyelim. $a > 0$ ve $3p^n > 0$ olduğundan $a > 4$ olduğu görülür.. $(2a + 11, a - 4) = d$ olsun. O halde $d | 2a + 11 - 2(a - 4) = 19$ olur ve buradan $d \in \{1, 19\}$ olduğu görülür.

1. Durum: $(2a + 11, a - 4) = 1$.
Bu durumda $2a + 11$ ve $a - 4$ aralarında asal olduğundan tam olarak biri p^n ile bölünür ve dolayısıyla diğeri de 1 veya 3 olmalıdır. $2a + 11 \geq 13$ olduğu için $a - 4 \in \{1, 3\}$ olur. Başka bir deyişle, $a = 5$ veya $a = 7$. Bu iki durumdan $(5, 1, 7)$ ve $(7, 2, 5)$ çözümleri elde edilir.

2. Durum: $(2a + 11, a - 4) = 19$.
Bu durumda $p = 19$ olur ve dolayısıyla $2a + 11$ ve $a - 4$ sayılarından birinin 19 veya $3 \cdot 19 = 57$ olması gerektiği görülür. O halde $a \in \{4, 23, 61\}$ elde edilir. Bu durumlardan sadece $(23, 2, 19)$ çözümü gelir.

2. x, y, z pozitif gerçel sayıları $xy + yz + zx = x^5 + y^5 + z^5$ eşitliğini sağlıyorsa

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq 3$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A = xy + yz + xz = x^5 + y^5 + z^5$ olsun. AGO eşitsizliğinden

$$x^5 + y^5 + 1 + 1 + 1 \geq 5xy$$
$$x^5 + z^5 + 1 + 1 + 1 \geq 5xz$$
$$z^5 + y^5 + 1 + 1 + 1 \geq 5yz$$

elde edilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında $2A + 9 \geq 5A$ bulunur. O halde $A \leq 3$.

Yine AGO eşitsizliğinden

$$\overbrace{x^5+\cdots+x^5}^{4\text{ tane}}+\overbrace{xy+\cdots+xy}^{10\text{ tane}}+y^5 \geq 15x^2y$$
$$\overbrace{y^5+\cdots+y^5}^{4\text{ tane}}+\overbrace{yz+\cdots+yz}^{10\text{ tane}}+z^5 \geq 15y^2z$$
$$\overbrace{z^5+\cdots+z^5}^{4\text{ tane}}+\overbrace{xz+\cdots+xz}^{10\text{ tane}}+x^5 \geq 15z^2x$$

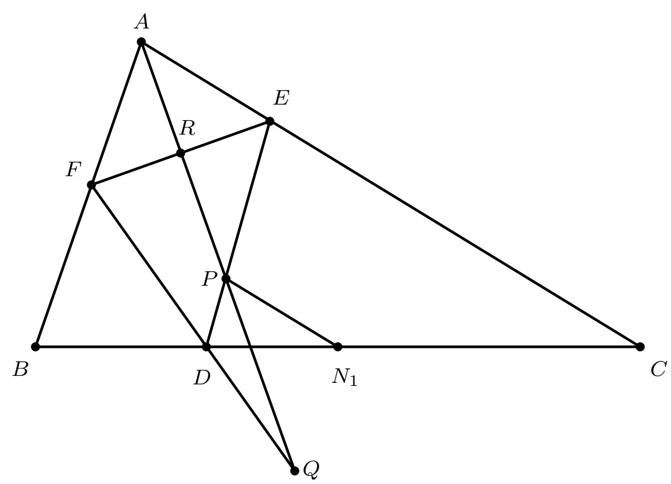
eşitsizlikleri elde edilir ve bunlar taraf tarafa toplanıp her iki taraf 15 ile bölündüğünde

$$x^2y+y^2z+z^2x \leq A$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $A \leq 3$ olduğundan $x^2y+y^2z+z^2x \leq 3$ elde edilir.

3. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin BC, CA ve AB kenarlarına değdiği noktalar sırasıyla D, E ve F olsun. A köşesine ait iç açıortayın DE ve DF yi kestiği noktalar P ve Q olsun. DPQ üçgeninin çevrel çember merkezinin $[BC]$ nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



DPQ üçgeninin çevrel merkezine N ve $[EF]$ nin orta noktasına R diyelim. Öncelikle N noktasının $[BC]$ üzerinde olduğunu ispatlayalım. P den AC ye çizilen paralelin BC ile kesişimine N_1 dersek, $s(\widehat{DN_1P}) = s(\widehat{C})$ ve $|N_1D| = |N_1P|$ elde ederiz. $QR \perp EF$ ve $s(\widehat{EFD}) = 90° - \dfrac{s(\widehat{C})}{2}$ olduğundan, $s(\widehat{PQD}) = 90° - s(\widehat{EFD}) = \dfrac{s(\widehat{C})}{2}$ bulunur. Dolayısıyla $s(\widehat{DN_1P}) = 2 \cdot s(\widehat{DQP})$ ve $|N_1D| = |N_1P|$ olup, $N_1 = N$ elde ederiz ve sonuç olarak $N \in [BC]$ olur. Ayrıca, $N_1 = N$ olması $NP \parallel EC$ ve $NQ \parallel BF$ olduğunu da gösterir. Şimdi, $|NB| = |NC|$ olduğunu göstermeliyiz.

DEF üçgeninde P, Q, R noktalarına göre Menelaus teoreminden,

$$\frac{|QD|}{|QF|}\frac{|EP|}{|PD|} = \frac{|ER|}{|RF|} = 1$$

elde ederiz. $NQ \parallel BF$ olduğundan $\dfrac{|QD|}{|QF|} = \dfrac{|ND|}{|NB|}$ ve aynı şekilde $NP \parallel EC$ olduğundan $\dfrac{|EP|}{|PD|} = \dfrac{|NC|}{|ND|}$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{|NC|}{|NB|} = \frac{|NC|}{|ND|}\frac{|ND|}{|NB|} = \frac{|EP|}{|PD|}\frac{|QD|}{|QF|} = 1$$

elde ederiz ve ispat biter.

4. Her biri renkli toplar içeren 27 karton kutu ve 27 plastik kutu bulunuyor. Aynı türden herhangi iki kutuda aynı renkte top bulunmuyor fakat farklı türden herhangi iki kutuda aynı renkte top bulunuyor. Her adımda, farklı türden kutularda bulunan aynı renkte iki top seçip bunları istediğimiz bir renge boyuyoruz. Başlangıç durumu nasıl olursa olsun, en fazla n adım sonucunda her kutunun aynı renkte en az iki top içermesini sağlayabiliyorsak, n en az kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: 41.

İlk önce 41 işlemin yeterli olacağını gösterelim. Kutuları her biri 2 karton ve 2 plastik kutu içeren 12 gruba ve 3 karton ve 3 plastik kutu içeren bir diğer gruba ayıralım. Birinci grubun K_1 kutusundaki renkler $\{1, 2, ...\}$, K_2 kutusundaki renkler $\{3, 4, ...\}$, P_1 kutusundaki renkler $\{1, 3, ...\}$ ve P_2 kutusundaki renkler $\{2, 4, ...\}$ olsun. Üç işlemde sırasıyla 2, 4 ve 3 renkli topları 1 rengine boyarsak bu gruptaki her kutu istenen koşulusağlayacaktır. Dört kutudan oluşan diğer 11 grupta da benzer şekilde işlemler yaparak 48 kutunun koşulu sağlanmasını sağlayabiliriz.

Sonuncu grubun K_{25} kutusundaki renkler $\{49, 50, 51, ...\}$, K_{26} kutusundaki renkler $\{52, 53, 54, ...\}$, K_{27} kutusundaki renkler $\{55, 56, 57, ...\}$, P_{25} kutusundaki renkler $\{49, 52, 55, ...\}$, P_{26} kutusundaki renkler $\{50, 53, 56, ...\}$, ve P_{27} kutusundaki renkler $\{51, 54, 57, ...\}$, olsun. Beş işlemde sırasıyla 50, 53, 54, 57 ve 55 renkli topları 49 rengine boyarsak bu gruptaki her kutu istenen koşulu sağlayacaktır. Dolayısıyla $3 \cdot 12 + 5 = 41$ işlem yeterli olacaktır.

Şimdi en az 41 işlem gerektiren bir duruma örnek verelim. Farklı türden herhangi iki kutuda tam olarak bir top çifti aynı renkte olsun. Sadece bir işlem yapılan karton kutu sayısı k olsun. O zaman kalan karton kutulara en az $54 - 2k$ ve toplamda karton kutulara en az $54 - k$ işlem yapılacaktır. Bu k işlem kendi başına hiçbir plastik kutuda aynı renkli iki top oluşturmaz. Buna göre, 27 plastik kutunun her birine bu k işlem dışında işlem yapılması gerekir ve toplamda plastik kutulara en az $27 + k$ işlem yapılacaktır. Sonuç olarak $\max\{54 - k, 27 + k\} \geq 41$ olduğundan en az 41 işlem gerektiği görülür.