TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

29. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2021
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

3 Temmuz 2021 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda $|CD| = 6$, $|AC| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ve $|BC| = 2\sqrt{3} + 2$ eşitlikleri sağlanmaktadır. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCB})$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: 2. A noktasından geçip BC doğrusuna paralel olan doğrunun $[CD]$ ile kesişimi E noktası olsun. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCB})$ eşitliğinden DEA ve DAC üçgenlerinin benzer olduğu görülür. Diğer taraftan, $ABCE$ paralelkenar olduğundan $|AE| = |BC| = 2\sqrt{3} + 2$ ve $|AB| = |EC|$ olur. Buradan

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DE|}{|DA|}$$

eşitliklerini kullanarak $|DA| = \dfrac{6 \cdot (2\sqrt{3} + 2)}{3\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$ ve $|DE| = \dfrac{(2\sqrt{6})^2}{6} = 4$ elde edilir. Sonuç olarak $|AB| = |EC| = 6 - |DE| = 2$'dir.

2. Kaç farklı p asal sayısı için $29^{p+1} - 1$ sayısı p ile tam bölünür?

Cevap: 4. Fermat teoreminden $29^p \equiv 29 \pmod p$ elde edilir. Buradan $p | 29^2 - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ bulunur. O halde p asalı 2,3,5 ve 7'den biri olabilir.

3. Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilmek üzere, bir $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu $f(1) = 1$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(7n + 1) = f(n), \quad f(7n + 2) = 2f(n), \quad f(7n + 4) = 4f(n)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Buna göre $f(3900)$ kaçtır?

Cevap: 32. 1 sayısından başlayıp her adımda bir önceki sayıyı 7 ile çarpıp $1, 2, 4$'ten birini ekleyerek 3900 sayısına nasıl ulaşabileceğimizi inceleyelim. $7^4 < 3900 < 7^5$ olduğundan eğer ulaşabiliyorsak 4 hamle gereklidir. a_i ile i. hamlede eklediğimiz sayıyı gösterelim. ($a_i \in \{1, 2, 4\}$).

$$7^4 + 7^3 a_1 + 7^2 a_2 + 7a_3 + a_4 = 3900 \quad (1)$$

elde ederiz. Yani 3900 sayısının 7 tabanında yazılımındaki basamaklara bakmak gereklidir. $3900 = (14241)_7$ olduğundan $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (4, 2, 4, 1)$ olur. $f(3900) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 32$ olur. Her i için $0 \le a_i < 7$ olduğundan (1) numaralı denklemin birden çok çözümü olamaz.
Not: Pozitif tam sayıları 7 tabanında yazılımlarındaki basamakların çarpımına götüren fonksiyon soruda verilen şartları sağlar.

4. 7 farklı top 5 farklı kutuya, en az 2 kutu boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Cevap: 19325. Toplar, boş kutu sayısı 2 ise $\binom{5}{3}(3^7 - (3 \cdot 2^7 - 3)) = 18060$, boş kutu sayısı 3 ise $\binom{5}{3}(2^7 - 2) = 1260$ ve boş kutu sayısı 4 ise $\binom{5}{4} = 5$ şekilde dağıtılabilir. Buna göre cevap $18060 + 1260 + 5 = 19325$ olur.

5. Çeşitkenar bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = |EC| < |BE|$ olacak şekilde D ve E noktaları alınıyor. $|AB| = 3|AD| + |AE|$ ve $|AC| = |AD| + 3|AE|$ ise, $\dfrac{|BC|}{|DE|}$ kaçtır?

Cevap: 8. $|AB| = a, |AD| = b, |AE| = c, |AC| = d, |BD| = |EC| = p, |DE| = q$ olsun. Stewart teoreminden $(a^2q + c^2p)/(p + q) - pq = b^2$ ve $(d^2q + b^2p)/(p + q) - pq = c^2$ olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak $(a^2 - d^2)q - (b^2 - c^2)p = (p + q)(b^2 - c^2)$ ve $(a^2 - d^2)/(b^2 - c^2) = (2p + q)/q$ elde ederiz. $a = 3b + c$ ve $d = b + 3c$ olduğundan $a^2 - d^2 = 8(b^2 - c^2)$ dir. Buradan da $|BC|/|DE| = (2p + q)/q = 8$ elde edilir.

6. Kaç tane n pozitif tam sayısı için n^3 sayısının rakamları toplamı $4n$ sayısına eşittir?

Cevap: 1. n sayısı k basamaklı olsun. O zaman $10^{k-1} \le n < 10^k$ elde edilir. n^3 sayısının basamak sayısı en fazla $3k$'dir ve dolayısıyla basamakları toplamı en fazla 27k'dir. Buradan $4 \cdot 10^{k-1} \le 4n \le 27k$ gelir. Sonuç olarak $k \le 2$ olur. $4n \le 27k \le 54$ ve $n \le 13$ elde edilir. $13^3 = 2197$ olduğundan $4n \le 2 + 3 \cdot 9 = 29$ olur. Buradan $n \le 7$ elde edilir. $n = 1, 2, \ldots, 7$ için incelendiğinde sadece $n = 2$ için koşul sağlanır.

7. Bir $(a_n)_{n=1}^{100}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 3$ ve her $n = 1, 2, \ldots, 99$ için

$$a_{n+1} = a_n + 1 - \frac{2}{n^2 + n}$$

eşitliğini sağlıyorsa, $a_1 + 2a_2 + \cdots + 100a_{100}$ toplamı kaçtır?

Cevap: 338550. Verilen eşitlik $a_{n+1} = a_n + 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n+1}$ olduğundan $a_{n+1} - (n + 1) - \dfrac{2}{n+1} = a_n - n - \dfrac{2}{n}$ olur. Bu ise $a_n - n - \dfrac{2}{n}$ ifadesinin sabit olduğunu gösterir. $a_1 = 3$ olduğundan $a_n - n - \dfrac{2}{n} = 0$ olur. Yani her

n pozitif tam sayısı için $na_n = n^2 + 2$ dir. Buradan da

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + 100a_{100} = \sum_{n=1}^{100}(n^2+2) = \frac{100\cdot 101\cdot 201}{6} + 200 = 338550$$

elde edilir.

8. Bir çember etrafına yazılmış olan sıfırdan farklı 200 sayı, komşu sayılar farklı renkte olacak şekilde kırmızı ve beyaz renge boyanmıştır. Her kırmızı sayı iki komşusunun çarpımına, her beyaz sayı ise iki komşusunun toplamına eşittir. Buna göre bu 200 sayının toplamı kaçtır?

Cevap: 75. Sayıları hehrangi bir sayıdan başlayarak saat yönünde numaralandıralım. Genelliği bozmadan $a_1 = a, a_2 = ab, a_3 = b$ olursa, $a_4 = (1-a)b, a_5 = 1-a, a_6 = (1-a)(1-b), a_7 = 1-b, a_8 = a(1-b)$ elde edilir ve bundan sonraki sayılar aynı sırayla periyodik olarak tekrar eder. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = a+ab+b+(1-a)b+1-a+(1-a)(1-b)+1-b+a(1-b) = 3$ olduğuna göre, bu 200 sayının toplamı $3\cdot\dfrac{200}{8} = 75$ olur.

9. Bir ABC üçgeninde A köşesinden ve $[BC]$ kenarının orta noktasından geçen doğru ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez D noktasında kesmektedir. $|AB| = 15$, $|BC| = 24$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2\cdot m(\widehat{BCD})$ ise, $|DC|$ kaçtır?

Cevap: 10. $[BC]$ kenarının orta noktası M, B'den geçen ve CD'ye paralel olan doğrunun AD ile kesişimi K olsun. $|BM| = |MC| = 12$'dir ve BK doğrusu ABM üçgeninde B'ye ait iç açıortaydır. Paralellik ve açılardan $|DC| = |BK| = |KA|$ olduğu kolayca görülür. İç açıortay teoreminden $|AK| = 5k$ ve $|KM| = 4k$ olsun. $|MD| = 4k$ olur ve çemberde M noktasına göre kuvvetten $12^2 = 4k\cdot 9k$ elde edilir. O zaman $k = 2$ ve $|CD| = 5k = 10$ bulunur.

10. $n = 5, 7, 11, 13, 121$ değerlerinden kaç tanesi için $\dfrac{k^2+3k+5}{n}$ tam sayı olacak şekilde k tam sayısı bulunmaz?

Cevap: 3. n tek sayı iken $n|k^2+3k+5$ ancak ve ancak $n|4(k^2+3k+5) = (2k+3)^2 + 11$'dir. $n = 5$ ve $k = 0$ iken ifade tam sayıdır. $n = 7$ için (mod 7)'de bir tam kare 0,1 veya 2'ye denk olduğundan ifadenin tam sayı olduğu k bulunmaz. $n = 11$ ve $k = 4$ iken ifade tam sayıdır. $n = 13$ için (mod 13)'te bir tam kare 0,1,3,4,9,10 veya 12'ye denk olduğundan ifadenin tam sayı olduğu k bulunmaz. $n = 121$ için ifade tam sayı ise $2k+3$ sayısı 11 ile bölünür. Ancak bu durumda $(2k+3)^2$ 121 ile bölünür ve ifade tam sayı olmaz, çelişki.

11. a ve b gerçel sayılar olmak üzere,

$$x^4 - x^3 + (a+b-2)x^2 + (b-2a)x + ab$$

polinomunun 4 farklı gerçel kökü varsa, $4a+b$ toplamı $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{17}{8}$ ve $\frac{5}{2}$ değerlerinden kaç tanesini alabilir?

Cevap: 3. $x^4-x^3+(a+b-2)x^2+(b-2a)x+ab = (x^2+x+a)(x^2-2x+b)$'dir. İlk çarpanın iki farklı kökü olması için $a < 1/4$, ikinci çarpanın iki farklı kökü olması için ise $b < 1$ olmalı. O zaman $4a+b < 2$ olmalı. Herhangi $t < 2$ gerçel sayısı için de verilen polinomunun dört farklı kökü bulunacak ve $4a+b = t$ olacak şekilde a ve b bulunduğu kolayca görülür. $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{17}{8}$ ve $\frac{5}{2}$ sayılarından üç tanesi 2'den küçüktür.

12. Bir sıraya dizilmiş 58 cücenin 29 tanesinin kavuğu kırmızı, diğer 29 tanesinin kavuğu ise beyaz renktedir. Başlangıçtaki diziliş nasıl olursa olsun, en fazla k tane kırmızı ve en fazla k tane beyaz kavuklu cüceyi sıradan çıkartarak sırada kalan farklı renkte kavuğa sahip en fazla bir ardışık cüce ikilisi bulunması sağlanabiliyorsa, k en az kaçtır?

Cevap: 14. İlk önce $k = 14$'ün şartı sağladığını gösterelim. Sırada en soldaki cüceden sağa doğru ilerileyerek kırmızı kavuklu cüceleri ve beyaz kavuklu cüceleri ayrı ayrı sayalım. Bu iki sayıdan herhangi biri 15 olunca duralım. Genelliği bozmadan son saydığımız cücenin kavuğu kırmızı olsun. Bu cücenin solundaki tüm beyaz kavuklu cüceleri ve sağındaki tüm kırmızı kavuklu cüceleri sıradan çıkartırsak farklı renkli kavuklu cüceler iki gruba ayrılmış olur ve sorudaki koşul sağlanır.

Soldan başlayarak ilk 14 cücenin kavuğu kırmızı, sonraki 29 cücenin kavukları beyaz ve son 15 cücenin kavukları beyaz olduğu durumda herhangi bir $k \leq 13$ sayısının yeterli olamayacağı açıktır.

13. Köşeleri O merkezli bir ω çemberi üzerinde yer alan bir $ABCD$ karesi veriliyor. $[CD]$ kenarının orta noktasından geçen bir doğru ω çemberinin küçük CD yayını K de, küçük AD yayını L noktasında kesiyor. $m(\widehat{KOL}) = 120°$ ise, $m(\widehat{KDC})$ kaçtır?

Cevap: 15°. $[CD]$'nin orta noktası E olsun. $OE \perp CD$'dir. ω çemberinin yarıçapı 1 olsun. $OK = 1$ ve $OE = 1/\sqrt{2}$ olur. KEO üçgeninde sinüs teoreminden $\sin(\widehat{KEO}) = 1/\sqrt{2}$ olur. L noktası AD küçük yayı üzerinde olduğundan $m(\widehat{KEO}) > 90°$ dir. Buradan da $\mathrm{m}(\widehat{KEO}) = 135°$ buluruz. Bu ise $EK \perp OD$ olduğunu gösterir. $\triangle KDE \sim \triangle KOE$ dir. Buradan da $m(\widehat{KDC}) = m(\widehat{KDE}) = m(\widehat{KOE}) = 15°$ elde edilir.

14. $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 29\}$ olmak üzere,

$$\frac{a^5 + b^6 + c^7 - 2021}{29}$$

ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan kaç farklı (a, b, c) üçlüsü vardır?

Cevap: 841. Fermat teoreminden dolayı x ve y 29 ile bölünmeyen tam sayılar ise $x^{28} \equiv y^{28} \equiv 1 \pmod{29}$'dur. Öte yandan $x^5 \equiv y^5 \pmod{29}$ ise, $1 \equiv (x^{28})^2 \equiv x^{56} \equiv (x^5)^{11} \cdot x \pmod{29}$ ve $1 \equiv (y^{28})^2 \equiv y^{56} \equiv (y^5)^{11} \cdot y \pmod{29}$ olduğundan $x \equiv y \pmod{29}$ elde edilir. O halde $1^5, 2^5, \ldots, 28^5$ sayıları $\pmod{29}$'da birbirlerinden ve 0'dan farklıdırlar Dolayısıyla $1^5, 2^5, \ldots, 29^5$ sayıları $\pmod{29}$'da farklıdırlar ve her değeri alırlar. (Bu sonuca 5 ve $29 - 1 = 28$ sayıları aralarında asal oldukları için ulaşabildik.) Bu sebepten dolayı, herhangi b ve c değeri için tam olarak bir a sayısı bulunur ve sonuç olarak cevap $29^2 = 841$ olur.

15. n sayısının 2041, 2042, 2043, 2044 ve 2045 değerlerinden kaç tanesi için,

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 2021 \quad \text{ve} \quad P(m) = n$$

olacak şekilde tam sayı katsayılı bir $P(x)$ polinomu ve m tam sayısı bulunur?

Cevap: 1. $1, 2, 3$ ve 4 sayıları $P(x) - 2021$ polinomunun kökleridir. O halde $P(x) - 2021 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)$ olacak şekilde $Q(x)$ polinomu bulunur. Ayrıca $P(x)$ polinomu tam sayı katsayılı olduğu için $Q(x)$ de tam sayı katsayılıdır. Dolayısıyla $n - 2021 = (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)Q(m)$ elde edilir ve sonuç olarak $n - 2021$ sayısı dört ardışık tam sayının çarpımı ile bölünmelidir. Sadece $n = 2045$ durumunda $2045 - 2021 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sayısı dört ardışık tam sayının çarpımı ile bölünür. $n = 2045$ için,

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2021$ ve $m = 5$ sorudaki koşulları sağlar.

16. Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir tablonun birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, hem herhangi bir satırdaki sayıların toplamı hem de herhangi bir sütundaki sayıların toplamı tek sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

Cevap: 144. Her satırda bir ya da üç tane 1 sayısı bulunmalıdır. Buna göre tam olarak iki satırda üç tane 1 sayısı bulunacaktır. Üç tane 1 içeren iki satırı $\binom{4}{2} = 6$ şekilde seçelim ve bu satırların daha üstte bulunanına 1 sayılarını $\binom{4}{3} = 4$ şekilde yerleştirelim. Tam olarak iki sütunda da üç tane 1 sayısı bulunacaktır. Buna göre, üç tane 1 içeren ikinci satıra 1 sayılarını $\binom{3}{2} = 3$ şekilde yerleştirebiliriz. Bundan sonra üçer 1 sayısı içeren sütunlar belirlenmiş olacaktır. Bu sütunlardaki üçüncü 1 sayılarını 2 farklı şekilde yerleştirebiliriz ve cevap $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ olur.

17. Herhangi üçünden bir geniş açılı üçgen oluşturulabilen n çubuk bulunuyorsa, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 4. Çubukların uzunlukları $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ olsun. Çubukların herhangi üçünden bir geniş açılı üçgen oluşturulabiliyorsa, tüm $i < j < k$ üçlüleri için $a_i + a_j > a_k$ ve kosinüs teoreminden $a_i^2 + a_j^2 < a_k^2$ olmalıdır. $n \geq 5$ olursa, $a_5^2 > a_4^2 + a_3^2 \geq 2a_3^2 > 2a_2^2 + 2a_1^2$. Diğer taraftan $a_1 + a_2 > a_5$ olduğundan $a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 > a_5^2$ olur ve buradan $2a_1a_2 > a_1^2 + a_2^2$ çelişkisi gelir. $n = 4$ için $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1,5$ ve $a_4 = 1,9$ örneği koşulları sağlıyor.

18. a, b, c ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, $a + b + c = 939$ ve $a \cdot b \cdot c$ sayısı 10^k ile tam bölünüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

Cevap: 7. 939 sayısı 5 ile tam bölünmediğinden a, b ve c sayılarından en az biri 5 ile bölünmüyordur. $5^4 = 625 < 939 < 5^5 = 3125$ olduğundan bu sayılardan birindeki 5'in kuvveti en fazla 4 olabilir. $2 \cdot 626 = 1250 > 939$ olduğundan iki sayıda birden 5'in kuvveti 4 olamaz. O halde $a \cdot b \cdot c$ çarpımındaki 5'in kuvveti en fazla 7'dir ve sonuç olarak $k \leq 7$ bulunur. $a = 625, b = 250$ ve $c = 64$ için $a \cdot b \cdot c = 10^7$'dir.

19. a bir gerçel sayı olmak üzere, $x^3 + ax^2 + 108 = 0$ denklemini sağlayan tam olarak iki farklı x gerçel sayısı bulunmaktadır. Buna göre a kaçtır?

Cevap: -9. Denklemi sağlayan gerçel sayılar b ve c olsun. O halde $(x-b)$ ve $x-c)$ ifadeleri x^3+ax^2+108 polinomunun çarpanlarıdır. Üçüncü çarpan da bu ikisinden biri olmalı. Genelliği bozmadan $x^3+ax^2+108 = (x-b)^2(x-c)$ diyebiliriz. O halde $x^3 + ax^2 + 108 = x^3 - (2b+c)x^2 + (b^2+2bc)x - b^2c$ elde edilir. Buradan $a = -2b - c$, $b(b+2c) = 0$ ve $b^2c = -108$ bulunur. $b = 0$ olamaz. Demek ki $b = -2c$. O zaman da $c^3 = -27$, yani $c = -3$ ve $b = 6$ elde edilir. Sonuç olarak $a = -2b - c = -9$ gelir.

20. Başlangıçta bir tahtada 29 sayısı yazılıdır. Her işlemde tahtada yazılı a sayısı silinip yerine $17a + 1$ ya da $a - 7$ sayılarından biri yazılıyor. Sonlu sayıda işlem sonucunda tahtada yazılı olamayacak en küçük beş basamaklı pozitif tam sayı kaçtır?

Cevap: 10006. $a_1 = 29 \pmod 7$ ve her $n \geq 1$ sayısı için $a_{n+1} = 17a_n + 1 \pmod 7$ şeklinde tanımlanmış dizi periyodu 7 olan bir dizidir: $1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, ...$ Demek ki $a_n \not\equiv 3 \pmod 7$. Diğer taraftan her $m \neq 3$ sayısı için $a_n = m \pmod 7$ ve $a_n > 10^5$ olacak şekilde bir a_n elemanı bulunuyor. Sonuç olarak gerekirse $a - 7$ işlemleri de yapılarak 7 modunda kalanı 3 olmayan her sayı elde edilebiliyor. Buna göre, cevap 10006 olur.

21. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $m(\widehat{ACB}) = 100°$, $m(\widehat{ACD}) = 30°$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 20°$ ise, $m(\widehat{DAC})$ kaçtır?

Cevap: $40°$. $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin kesişim noktası E olsun. $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{EDC}) = 30°$ olduğundan $|CE| = |ED|$ olur. $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 20°$ eşitliğinden C noktasının BE doğrusuna göre simetriği olan F noktası $[AB]$ üzerinde yer alır. $|FE| = |CE| = |ED|$ ve $m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{DEA}) = 60°$ olduğundan AE doğrusu FD doğrusuna diktir ve $[FD]$'yi iki eş parçaya böler. Dolayısıyla ADF üçgeni ikizkenardır ve bu üçgende AE doğrusu açıortaydır. Sonuç olarak $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB}) = 40°$ bulunur.

22. $n^3 - 4m^3 + 3n^2m = 20$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. $n^3 - 4m^3 + 3n^2m = 4n^3 - 4m^3 + 3n^2m - 3n^3 = 4(n-m)(n^2+nm+m^2) - 3(n-m)n^2 = (n-m)(n+2m)^2 = 20$. Dolayısıyla $(n-m, n+2m)$ ikilisi $(5,2),(5,-2),(20,1)$ ve $(20,-1)$ ikililerinden biridir. Durumlar incelendiğinde (m,n) ikilisinin alabileceği değerlerin $(4,-1)$ ve $(13,-7)$ olduğu görülür.

23. $f(x) = x^2(x-1)(x-3)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{12} f(x_n) = -4$$

denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_{12})$ tam sayı 12-lilerinin sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 3. $f(0) = f(1) = f(3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f(2) = -4$, $x \leq -2$ için $f(x) \geq 60$ ve $x \geq 4$ için $f(x) \geq 48$'dir. $f(x_n)$'ler toplamları negatif olan 12 tane sayı olduğu için x_n sayılarının her biri $-1, 0, 1, 2, 3$'ten biri olmalıdır. Ayrıca bir çözümün herhangi bir permütasyonu da çözümdür. Farklı olmak zorunda olmayan 12 tane sayının permütasyonlarının sayısı sadece iki durumda 11 ile bölünmez. Hepsi aynı sayı iken ya da biri hariç hepsi aynı sayı iken. $f(x_n)$'ler tam sayı olduğu için hepsi aynı olamaz. Diğer durumda ise onbir tanesinin 0 ve bir tanesinin -4 olması gerektiği kolayca görülür. O zaman $\binom{12}{1}3^{11} \equiv 3 \pmod{11}$ olduğundan cevap 3'tür.

24. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümeleri $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümeleridir. Bu alt kümelerin herhangi ikisinin kesişimi en fazla bir eleman içeriyorsa, k en fazla kaçtır?

Cevap: 8. $\frac{7}{2} < 4$ olduğu için $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesinin her elemanı en fazla üç alt kümede bulunabilir. Buna göre, $3k \leq 3 \cdot 8$ yani $k \leq 8$ elde edilir. Şimdi de $k = 8$ için bir örnek verelim: $A_1 = \{1,2,5\}, A_2 = \{2,3,6\}, A_3 = \{3,4,7\}, A_4 = \{1,4,8\}, A_5 = \{4,5,6\}, A_6 = \{1,6,7\}, A_7 = \{2,7,8\}, A_8 = \{3,5,8\}$ alt kümeleri sorudaki koşulu sağlıyor.

25. Bir ABC üçgeninde sırasıyla $[BC]$, $[AC]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde alınan D, E ve F noktaları için AD, BE ve CF noktadaştır. $|BD| = |CD|$, $CF \perp AB$, $|CF| = 8$, $|DF| = 5$ ve $|EF| = 6$ ise, $|BE|$ kaçtır?

Cevap: $24/\sqrt{5}$. Öncelikle $|BD| = |CD|$ ve AD, BE, CF noktadaş olduğundan Seva teoreminden $EF \parallel BC$ bulunur. Diğer taraftan $CF \perp AB$

ve $|DF| = 5$ olduğundan $|BC| = 10$ elde edilir. $|CF| = 8$ eşitliği kullanılarak Pisagor teoreminden $|BF| = 6$ bulunur. $EF \parallel BC$, $|EF| = 6$, $|BC| = 10$ ve $|BF| = 6$ olduğundan dolayı Tales teoreminden $|AF| = 9$, $|AE| = 3k$ ve $|EC| = 2k$ elde edilir. Diğer taraftan $EF \parallel BC$ ve $|EF| = |FB|$ olduğu için $[BE]$ açıortay olur. Pisagor teoreminden $25k^2 = 8^2 + 9^2$ ve açıortay teoreminden $15 \cdot 10 - 2k \cdot 3k = |BE|^2$ olur ve sonuç olarak $|BE| = 24/\sqrt{5}$ bulunur.

26. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, n^2 yi tam bölen ancak n yi tam bölmeyen pozitif tam sayıların sayısı 9 ise, n sayısının pozitif tam bölen sayısı kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 2. p ve q asal sayılar olmak üzere $n = p^9$ veya $n = p^2q$ formunda olmalıdır.
$p_1, p_2, \ldots, p_k$ farklı asal sayılar ve $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ olsun. $a \nmid n$ ve $a \mid n^2$ olmasını sağlayan a pozitif tam sayılarının sayısı $(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_k+1) - (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$'e eşittir. $k = 1$ iken $a_1 = 9$ olur. $k = 2$ iken $3a_1a_2 + a_1 + a_2 = 9$ ve buradan da tek çözüm $a_1 = 1, a_2 = 2$ olur. $k \ge 3$ için $(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_k+1) \ge (2a_1+1)(2a_2+1)(2a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)$ olduğundan $9 \ge (2a_1+1)(2a_2+1)(2a_3+1) - (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) = 7a_1a_2a_3 + 3(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) + a_1 + a_2 + a_3$ olur. Son eşitsizlik $a_1, a_2, a_3 \ge 1$ olduğundan sağlanmaz. Sonuç olarak n sayısının pozitif tam bölen sayısı 10 veya 6 olabilir.

27. $x_1, x_2, \ldots, x_5$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{64}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + 8x_5^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 63/2. $\frac{s^2}{t} - 4(s-t) = \frac{(s-2t)^2}{t} \ge 0$ olduğundan $\dfrac{s^2}{t} \ge 4(s-t)$ elde edilir. $(s,t) = (8, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5)$ ve $(x_5, 1/8)$ değerleri için elde edilen eşitsizlikleri toplarsak, ifadenin $4(8 - 1/8) = 63/2$ den küçük olamadığı görülür. Eşitlik durumu $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 1/2, x_5 = 1/4$ iken sağlanıyor.

28. Bir koordinat düzleminin orijininde bir bilye bulunmaktadır. k verilmiş bir pozitif tam sayı olmak üzere, her hamlede eksenlerden biri seçiliyor ve bilye önce seçilen eksene paralel şekilde k birim, sonra diğer eksene paralel şekilde de 1 birim öteleniyor. $k = 4, 7, 10, 29, 42$ değerlerinin kaçı için bilye tam sayı koordinatlı istenilen herhangi bir noktaya taşınabilir?

Cevap: 3. k sayısı tek olursa, $k + 1$ bir çift sayı olduğu için bilye, koordinatları toplamı tek olan noktalara taşınamaz. Şimdi k sayısının çift olduğu herhangi bir durumda bilyenin istenilen herhangi bir noktaya taşınabileceğini gösterelim. Bilye bulunduğu $(0, 0)$ noktasından başlayarak sırasıyla $(k, 1), (k - 1, k + 1), (k - 2, 1), ...$ noktalarına taşınırsa $k + 1$ hamle sonucunda $(0, 1)$ noktasına varmış olur. Benzer biçimde bilye $(0, 0)$ noktasından $(1, 0), (0, -1)$ ve $(-1, 0)$ noktalarına da taşınabilir. Sonuç olarak bilye bulunduğu noktanın 4 komşu noktasına ve dolayısıyla herhangi bir noktaya taşınabilir.

29. Bir $A_1A_2 \dots A_9$ düzgün dokuzgeninde A_1A_5 ile A_2A_7 doğruları B noktasında, A_1A_5 ile A_4A_8 doğruları da C noktasında kesişiyor. $[A_3B]$ üzerinde $m(\widehat{A_3A_2D}) = 15°$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. A_7BC üçgeninin alanının BCD üçgeninin alanına oranı kaçtır?

Cevap: $\sqrt{3}$. A_4A_8 ile A_2A_7 doğruları E noktasında kesişsin. Düzgün dokuzgenin bir iç açısı 140°'dir. A_1A_2B ve A_7A_8E üçgenleri eşkenar olur. $|A_1A_2| = 1$ ve $|BE| = x$ dersek $|A_7B| = x + 1$ ve $|A_1B| = 1$ olacağından $x + 1 = \sin 40°/\sin 20° = 2\cos 20°$ bulunur. BA_2A_3 ikizkenar üçgendir ve buradan da $m(\widehat{A_2BA_3}) = 50°$ olur. $m(\widehat{A_3A_2D}) = 15°$ olduğundan $m(\widehat{DA_2B}) = m(\widehat{A_2DB}) = 65°$ olduğu görülür. Dolayısıyla $|BD| = 1$ elde edilir. Sonuç olarak A_7BC üçgeninin alanının BCD üçgeninin alanına oranı $(x + 1)/1 \cdot \sin 60°/\sin 70° = 2\cos 20° \cdot \sin 60°/\sin 70° = \sqrt{3}$ olur.

30. $p > 2$ bir asal sayı olmak üzere, $2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}$ sayılarının p ile bölümünden kalanlarının kümesi m elemanlı olmak üzere $2^{m-1} < p$ sağlanıyorsa, p sayısına *güzel asal* diyelim. 2021 den küçük kaç tane güzel asal sayı vardır?

Cevap: 4. 2021'den küçük olan güzel asallar $3, 7, 31$ ve 127'dir.
2'nin p modundaki derecesi d olmak üzere $2^{d-1} < p$ olmasını sağlayan $p > 2$ asal sayıları güzel asaldır. $p \mid 2^d - 1$ olduğundan $2^d = pk + 1$ olacak biçimde bir $k > 0$ tam sayısı bulunur. $2^{d-1} = (pk + 1)/2 < p$ olabilmesi için $k = 1$ olmalıdır. $p = 2^d - 1$ olur. Bu ise d asalken mümkündür. Yani güzel asallar Mersenne asallarıdır. Öte yandan tüm Mersenne asalları güzel asaldır. Çünkü p ve q asal sayılar ve $p = 2^q - 1$ iken 2'nin p modundaki

derecesi d olmak üzere $d \mid q$ ve $d > 1$ olduğundan $d = q$ dur. Bu ise $2^{d-1} = 2^{q-1} < 2^q - 1$ olduğunu gösterir. 2021'den küçük olan Mersenne asalları $3, 7, 31$ ve 127'dir.

31. $xy(x - y - 1) = 6$ eşitliğini sağlayan x ve y pozitif gerçel sayıları için $x + y$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $\sqrt{21}$. Eşitlik $x = (\sqrt{21} + 3)/2$ ve $y = (\sqrt{21} - 3)/2$ iken sağlanır. $xy = a$ dersek $x - y = 1 + 6/a$ olur. $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (1 + 6/a)^2 + 4a = 1 + 12/a + 36/a^2 + 4a$ olur. AGO eşitsizliğinden $12/a + 36/a^2 + 4a = 12/a + 36/a^2 + 4a/3 + 4a/3 + 4a/3 \geq 5\sqrt[5]{(12/a)(36/a^2)(4a/3)(4a/3)(4a/3)} = 5\sqrt[5]{12 \cdot 36 \cdot 64/27} = 20$ olur. Sonuç olarak $x + y \geq \sqrt{21}$ elde edilir.

32. Aslı ve Zehra başlangıçta hiçbir köşesi boyalı olmayan bir düzgün $2n$-gen üzerinde bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor ve oyuncular sırayla hamle yapıyorlar. Sırası gelen oyuncu ya boyalı olmayan bir köşeyi ya da çokgenin merkezine göre simetrik olan ve hiçbiri boyalı olmayan iki köşeyi boyuyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $n = 6, 12, 17, 29, 32$ değerleri için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaç tanesini kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 2. Oyunu n-nin tek değerlerinde Aslı, çift değerlerinde ise Zehra kazanıyor. n tek ise, Aslı ilk hamlesinde $2n$-genin merkezine göre simetrik olan herhangi A ve B köşelerini boyuyor. n sayısı tek olduğu için AB doğrusuna göre simetrisi kendisi olan köşe yoktur. Buna göre, Aslı bundan sonra Zehra'nın her hamlesinde boyadığı nokta ya da noktaların AB doğrusuna göre simetrilerini boyayarak oyunu kazanır. n sayısının çift olduğu durumda Zehra $2n$-genin köşelerini $n/2$ tane dörtlüye, her dörtlü bir karenin köşeleri olacak şekilde ayırıyor. Aslı karelerden birinin bir A köşesini boyarsa Zehra aynı karenin A noktasının çokgenin merkezine göre simetrisi dışındaki bir noktasını boyuyor. Aslı karelerden birinin çokgenin merkezine göre simetrik olan iki köşesini boyarsa Zehra aynı karenin çokgenin merkezine göre simetrik olan diğer iki noktasını boyayarak oyunu kazanır.