TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

29. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2021
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

3 Temmuz 2021 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan D ve E noktaları için $|BD| = |DE| = |EC|$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Buna göre,

I. $s(\widehat{ADB}) = s(\widehat{AEC})$
II. $s(\widehat{BAC}) = 3 \cdot s(\widehat{DAE})$
III. $|AD| = |CD|$
IV. $|AB| = |DE|$

ifadelerinden hangileri doğru olabilir?

Cevap: I ve III. Öncelikle $s(\widehat{BAC}) = 3 \cdot s(\widehat{DAE})$ doğru olsaydı, AD doğrusu ABE üçgeninde hem açıortay hem kenarortay olduğundan $AD \perp BE$ olurdu, benzer şekilde $AE \perp CD$ elde ederdik, bu da mümkün değildir. Diğer taraftan $|AB| = |DE|$ olursa, ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği sağlanmaz. Dolayısıyla II ve IV olamaz. ABD ve ACE üçgenleri eş olduğundan I her zaman doğrudur. $|AB| = |AC| = \sqrt{24}$ ve $|BC| = 6$ olduğunda III sağlanır. Sonuç olarak cevap I ve III olur.

2. n, 10^{10} ve 16^{10} sayılarının en küçük ortak katı 20^{20} olacak şekilde kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 41. Öncelikle n sayısı $20^{20} = 2^{40}5^{20}$'nin bir böleni olduğundan $n = 2^x5^y$ formundadır. $10^{10} = 2^{10}5^{10}$ ve $16^{10} = 2^{40}$ olduğundan $\max\{x, 10, 40\} = 40$ ve $\max\{y, 10, 0\} = 20$ elde edilir. Buradan $x \in \{0, 1, \ldots, 40\}$ ve $y = 20$ bulunur. Sonuç olarak koşulu sağlayan 41 tane farklı n pozitif tam sayısı vardır.

3. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $2a + b + 1 = 0$ ise, $a^2 + b^2$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 1/5. $b = -2a - 1$ olduğundan $a^2 + b^2 = a^2 + (-2a - 1)^2 = 5a^2 + 4a + 1 = 5(a + 2/5)^2 + 1/5 \geq 1/5$ olur. Eşitlik $a = -2/5, b = -1/5$ iken sağlanır.

4. 9 farklı top 5 farklı kutuya, en az 3 kutu boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Cevap: 5105. Toplar, boş kutu sayısı 3 ise $\binom{5}{3}(2^9 - 2) = 5100$, boş kutu sayısı 4 ise $\binom{5}{4} = 5$ şekilde dağıtılabilir. Buna göre cevap $5100 + 5 = 5105$

olur.

5. $s(\widehat{BAC}) = 110°$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $s(\widehat{ADE}) = 30°$, $s(\widehat{BCD}) = 10°$ ve $|DE| = |EC|$ ise, $s(\widehat{BEC})$ kaç derecedir?

Cevap: 130°. $s(\widehat{DAE}) = 110°$ ve $s(\widehat{ADE}) = 30°$ olduğundan $s(\widehat{DEA}) = 40°$ buluruz. Buradan $|DE| = |EC|$ olduğunu kullanarak $s(\widehat{EDC}) = s(\widehat{ECD}) = 20°$ bulunur. $s(\widehat{BCE}) = 30° = s(\widehat{ADE})$ olduğundan $BDEC$ kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $s(\widehat{BEC}) = s(\widehat{BDC}) = 180° - s(\widehat{ADC}) = 130°$ elde ederiz.

6. m bir pozitif tam sayı olmak üzere, $n^2 + 5n + 7$ ve $2n^2 + 3n + 5$ sayılarının ikisi de m ile tam bölünecek şekilde bir n pozitif tam sayısı varsa m ye *güzel sayı* diyelim. Tüm güzel sayıların toplamı kaçtır?

Cevap: 110. $m|n^2 + 5n + 7$ ve $m|2n^2 + 3n + 5$ olsun. O halde m sayısı $2(n^2 + 5n + 7) - (2n^2 + 3n + 5) = 7n + 9$ sayısını da böler. O zaman $m|7(n^2 + 5n + 7) - n(7n + 9) = 26n + 49$ bulunur. Buradan da $m|7(26n + 49) - 26(7n + 9) = 109$ elde edilir. O halde 109 asal sayı olduğu için $m = 1$ veya $m = 109$ olabilir. Açıkça görüleceği üzere 1 güzel sayıdır. $m = 109$ için $109|7n + 9$ olması kullanılarak $n = 61$ iken şartların sağlandığı kolayca görülür ve sonuç olarak 109 da güzel sayıdır.

7. a, b ve c farklı gerçel sayılar olmak üzere, $x^2 + (a + b)x + b + c = 0$ ve $x^2 + (a + c)x + 2c = 0$ denklemlerinin ortak bir kökü bulunmaktadır. Buna göre $a - c$ kaçtır?

Cevap: 1. Ortak kök t olsun. O halde $0 = 0 - 0 = (t^2 + (a + b)t + b + c) - (t^2 + (a + c)t + 2c) = (b - c)(t + 1)$ elde edilir. $b \neq c$ olduğundan $t = -1$ bulunur. O zaman $1 - (a + c) + 2c = 0$ olduğundan $a - c = 1$'dir.

8. Bir tahtada bir A pozitif tam sayısı yazılıdır. Herhangi bir dört basamaklı B pozitif tam sayısı için, A sayısının bazı basamaklarını silerek B sayısını elde etmek mümkündür. Buna göre, A sayısının basamak sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 39. Sayıların en az üçü 0, en az dördü 1, en az üçü 2,..., en az dördü 9 olmak zorundadır. Buna göre A sayısının basamak sayısı en az $3 + 9 \cdot 4 = 39$ olmalıdır. Diğer taraftan 39 basamaklı 123456789123456789012345678901234567890 sayısı sorudaki şartı sağlar. Buna göre, cevap 39 olur.

9. $s(\widehat{BAC}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninde $|AB| = 1$ ve $|AC| = 2$ dir. $[BC]$ üzerinde alınan bir D noktası ve $[CD]$ üzerinde alınan bir E noktası için, $|AD| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ve $s(\widehat{DAE}) = s(\widehat{ACE})$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Buna göre $|AE|$ kaçtır?

Cevap: 1. ABC dik üçgeninde $|BC| = \sqrt{5}$ ve A'ya ait yüksekliğin uzunluğu $2/\sqrt{5}$ tir. Yani $[AD]$ yüksekliktir. $\triangle DAE \sim \triangle DCA$ olduğundan $|AD|^2 = |DE| \cdot |DC|$ dir. Öklit teoreminden $|AD|^2 = |BD| \cdot |CD|$'dir. Buradan da $|BD| = |DE|$ olur. $AD \perp BE$ olduğundan ABE üçgeni ikizkenardır ve $|AE| = |AB| = 1$ bulunur.

10. Bir tahtaya ilk 123 pozitif tam sayı birer kez yazılmıştır. Bu tahtada kalan sayıların çarpımının ondalık yazılımı 4 ile bitecek şekilde tahtadaki sayılardan n tanesini silmek mümkün ise, n en az kaç olabilir?

Cevap: 25. 5 sayısının katları olan 24 sayının tahtadan silinmesi zorunludur. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ sayısı 6 rakamıyla bitiyor. $121 \cdot 122 \cdot 123$ sayısı da 6 rakamıyla bitiyor. Bu nedenle kalan sayıların çarpımı 6 ile bitiyor. Buna göre, tahtadan en az bir sayı daha silinmeli. 4 sayısı da tahtadan silinirse kalan sayıların çarpımı çift olacağından 4 rakamıyla bitecektir.

11. x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

$$x = y^2 - y - 2$$
$$y = -x^2 - x + 2$$

ise, $x + y$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 3. Verilen iki eşitliği taraf tarafa toplarsak $x+y = y^2 - x^2 - y - x = (x + y)(y - x - 1)$ ve buradan da $x + y = 0$ veya $y - x = 2$ elde ederiz. $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ iken $x + y = 0$ olur. $y - x = 2$ iken ilk denklemden $y-2 = y^2-y-2$ ve $y^2 = 2y$ buluruz. Bu ise $y = 0, x = -2$ veya $y = 2, x = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $x + y$ ifadesi $0, -2$ ve 2 değerlerini alabilir.

12. Bir kutuda 100 kırmızı ve 100 beyaz şeker bulunmaktadır. Aslı her hamlesinde kutudan rastgele iki şeker alıyor. Aslı, bu iki şeker aynı renkte ise ikisini de yiyor, farklı renkte ise kırmızı şekeri yiyor ve beyaz şekeri kutuya geri koyuyor. İlk k hamlede alınan şekerler nasıl olursa olsun Aslı en az 29 kırmızı şeker yiyorsa, k en az kaç olabilir?

Cevap: 79. Aslı kutudan ilk 28 hamlesinin her birinde bır kırmızı ve bır beyaz şeker, sonraki 50 hamlesinin her birinde iki beyaz şeker alırsa toplam 28 kırmızı şeker yer. O halde $k > 78$ olmalı.

Şimdi 79 hamlenin Aslı'nın 29 kırmızı şeker yemesi için yeterli olduğunu gösterelim. Aslı kutudan en fazla 50 kez iki beyaz şeker çıkarabilir. Bunun dışındaki her hamle sonucunda Aslı en az bir kırmızı şeker yer. Sonuç olarak 29+50=79 hamle sonucunda Aslı en az 29 şeker yemiş olur.

13. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan D ve E noktaları için E noktası C ile D arasındadır. AD ve AE doğrularının ABC üçgeninin çevrel çemberiyle A dan başka kesişim noktaları sırasıyla K ve L olsun. $|BD| = 2$, $|DK| = 3$, $|DE| = 4$, $|EC| = |EA|$ ve $|EL| = |DA|$ ise, $|AL|$ kaçtır?

Cevap: 11. Çembersellikten dolayı BEL ve AEC üçgenleri benzerdir. $|EC| = |EA|$ olduğundan dolayı $|DA| = |EL| = |BE| = 6$ bulunur. Diğer taraftan ise, çemberde D noktasına göre kuvvetten $|AD|\cdot|DK| = |BD|\cdot|DC|$ olduğu için $18 = 2 \cdot (4 + |EC|)$ gelir ve buradan da $|EC| = 5$ buluruz. Dolayısıyla $|AL| = |AE| + |EL| = |EC| + |EL| = 11$ elde ederiz.

14. $3^n + n$ sayısının 13 ile tam bölünmesini sağlayan 2021'den küçük kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 156. 3^n sayısı 13 modunda $3, 9, 1$ değerlerini alabilir. $n = 3k$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise, $3^n \equiv 1 \pmod{13}$'tür. $13|3^n + n$ olması için $13|1 + n = 1 + 3k$ olmalı. Bu durumda $k \equiv 4 \pmod{13}$ gelir ve dolayısıyla $n \equiv 12 \pmod{39}$ bulunur.
$n = 3k + 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise, $3^n \equiv 3 \pmod{13}$'tür. $13|3^n + n$ olması için $13|3 + n = 4 + 3k$ olmalı. Bu durumda $k \equiv 3 \pmod{13}$ gelir ve dolayısıyla $n \equiv 10 \pmod{39}$ elde edilir.
Son olarak $n = 3k + 2$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise, $3^n \equiv 9 \pmod{13}$'tür. $13|3^n + n$ olması için $13|9 + n = 11 + 3k$ olmalı. Bu durumda $k \equiv 5 \pmod{13}$ bulunur ve dolayısıyla $n \equiv 17 \pmod{39}$ elde edilir.
Sonuç olarak, $13 \mid 3^n + n$ olabilmesi için $n \equiv 10, 12, 17 \pmod{39}$ olmalıdır.

$2021 \equiv 32 \pmod{39}$ olduğundan şartları sağlayan toplam $\left\lceil \dfrac{2021}{13} \right\rceil = 156$ tane n pozitif tam sayısı vardır.

15. Bir miktar şeker Ali, Berk ve Cem arasında paylaştırıldıktan sonra Berk'in şeker sayısı Ali'ninkinin 4 katı, Cem'in şeker sayısı ise Berk'inkinin 3 katıdır. Sonra Cem, 54 şekerini Ali ve Berk arasında paylaştırıyor. Son durumda Berk'in şeker sayısı Ali'ninkinin 3 katı, Cem'in şeker sayısı ise Berk'inkinin 2 katı olmuştur. Buna göre bu üç kişideki toplam şeker sayısı kaçtır?

Cevap: 510. Ali, Berk ve Cem'in başlangıçtaki şekerlerinin sayısı sırasıyla a, b ve c olsun. $b = 4a$ ve $c = 3b = 12a$'dır. Toplam şeker sayısı $a + 4a + 12a = 17a$'dır. Ali, Berk ve Cem'in son durumdaki şekerlerinin sayısı sırasıyla a', b' ve c' olsun. $b' = 3a'$ ve $c' = 2b' = 6a'$ olduğundan toplam şeker sayısı $a' + 3a' + 6a' = 10a'$'dür. O halde $17a = 10a'$ ve dolayısıyla $a = 10x$ ve $a' = 17x$ bulunur. Demek ki Cem Ali'ye $17x - 10x = 7x$ şeker, Berk'e ise $51x - 40x = 11x$ şeker vermiştir. O zaman $18x = 54$ ve dolayısıyla $x = 3$ bulunur. Sonuç olarak toplam şeker sayısı $17a = 170x = 510$'dur.

16. Her tam sayıyı kırmızı ve beyaz renklerinden birine, ne farkları 1 olan iki kırmızı sayı ne de farkları k olan iki beyaz sayı bulunacak şekilde boyamak mümkünse, k sayısı 10, 12, 26, 33 ve 42 değerlerinden kaçını alabilir?

Cevap: 1. Bir n sayısı için n ve $n + 1$ sayıları beyaz renkte olursa, $n + k$ ve $n + k + 1$ sayıları kırmızı renkte olmak zorundadsır, bu da koşullarla çelişiyor. Buna göre, sayılar herhangi iki komşu sayının biri beyaz ve biri kırmızı olacak şekilde boyanmak zorundadır. Bu boyama k sayısının herhangi bir çift değeri için koşulları sağlamayıp tüm tek değerleri için koşulları sağlıyor. Sonuç olarak k sadece 33 değerini alabilir.

17. Bir $ABCD$ karesinin B köşesinden geçen bir çember, $[AB]$ kenarını K, $[BC]$ kenarını L, $[AC]$ köşegenini P ve M noktalarında (M noktası P ile C arasında), $[BD]$ köşegenini B den başka bir N noktasında kesmektedir. $s(\widehat{KLP}) = 30°$ ve $s(\widehat{KLB}) = 35°$ ise, $s(\widehat{PNM})$ kaç derecedir?

Cevap: 140°. Öncelikle çembersellikten $s(\widehat{KBP}) = s(\widehat{KLP}) = 30°$ buluruz. APB üçgenine bakarsak, $s(\widehat{BAP}) = 45°$ ve $s(\widehat{ABP}) = 30°$ olduğundan $s(\widehat{BPM}) = 75°$ bulunur. Yine çembersellikten ve $s(\widehat{KBL}) =$

$90°$ olduğundan $s(\widehat{BPL}) = s(\widehat{BKL}) = 90° - s(\widehat{BLK}) = 55°$ olur, dolayısıyla $s(\widehat{LPM}) = s(\widehat{BPM}) - s(\widehat{BPL}) = 20°$ buluruz. Sonuç olarak, çemberin çapı KL olduğundan, $s(\widehat{PNM}) = s(\widehat{PNK}) + s(\widehat{KNL}) + s(\widehat{LNM}) = s(\widehat{PLK}) + 90° + s(\widehat{LPM})$ elde ederiz. Dolayısıyla $s(\widehat{PNM}) = 30° + 90° + 20° = 140°$ olur.

18. 3 ile bölündüğünde 2, 5 ile bölündüğünde 3, 7 ile bölündüğünde 5, 11 ile bölündüğünde 7, 13 ile bölündüğünde 11 kalanını veren en küçük pozitif tam sayının 17 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 12. Verilen şartı sağlayan sayı n olsun. $n + 2$'nin $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$ ve $n + 4$'ün de $3 \cdot 11 = 33$ ile tam bölünmesi gerekiyor. $n = 455k - 2$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman $33|455k - 2 + 4 = 455k + 2$ ve dolayısıyla $33|26k + 2$ bulunur. Buradan da $33|k - 5$ elde edilir. $k = 33m + 5$ $(m \in \mathbb{Z})$ yazarsak, $n = 455(33m + 5) - 2 = 15015m + 2273$ elde ederiz. Sonuç olarak $n == 2273$'dir ve bu sayının 17 ile bölümünden kalan 12 bulunur.

19. Sadece A ve B sınıflarından oluşan bir kurstaki erkeklerin %40'ı A sınıfında, kızların ise %40'ı B sınıfında yer almaktadır. A sınıfındaki bir erkek ile B sınıfındaki bir kız karşılıklı sınıflarını değiştiriyor. Son durumda A sınıfındaki erkekler ile B sınıfındaki kızların toplam sayısı, A sınıfındaki kızlar ile B sınıfındaki erkeklerin toplam sayısının %60'ıdır. Buna göre bu kursta toplam kaç kişi bulunmaktadır?

Cevap: 80. Kurstaki kızların sayısı $5k$, erkeklerin sayısı $5e$ olsun. O zaman başlangıçta A sınıfında $2e$ erkek ve $3k$ kız, B sınıfında ise $3e$ erkek ve $2k$ kız vardır. Son durumda A sınıfında $2e - 1$ erkek ve $3k + 1$ kız, B sınıfında ise $3e+1$ erkek ve $2k-1$ kız vardır. O halde $2e-1+2k-1 = \frac{3}{5}(3k+1+3e+1)$ elde edilir. Buradan da $e + k = 16$ ve $5e + 5k = 80$ bulunur.

20. Her birinin kafasında kırmızı veya beyaz kavuk olan n cüce bir sıraya dizilmiştir. Herhangi ardışık 60 cücenin yarısının kavuğu kırmızı iken, yarısının kavuğunun kırmızı olduğu ardışık 62 cüce bulunmamaktadır. Buna göre n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 90. $n = 90$ için bir örnek verelim: Sıradaki ilk 30 cücenin kavuğu kırmızı, sanraki 30 cücenin kavuğu beyaz ve son 30 cücenin kavuğu kırmızı olursa, koşullar sağlanır.

Farzedelim ki $n > 90$ olabilsin. Cüceleri soldan sağa doğru numaralandıralım ve k numaralı cücenin kavuğunun rengi r_k olsun. Her $1 \leq k \leq n - 61$ sayısı için $\{r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+59}\}$ ve $\{r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+61}\}$ gruplarını ele alırsak $r_{k+60} = r_{k+61}$ olduğu görülür. Benzer şekilde $r_{61} = r_{62} = r_{63} = \cdots = r_n$ gelir. Bu nedenle son 60 cüceden kırmızı kavukluların sayısı 30 değildir. Bu çelişki $n \leq 90$ olduğunu gösteriyor.

21. $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda $[AB]$ kenarı üzerinde alınan bir F noktası için, AFD, FDC ve FCB üçgenlerinin çevreleri birbirine eşittir. $|AB| = 12$ ise, $|CD|$ uzunluğunun alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 6. F'den geçip AD doğrusuna paralel olan doğrunun DC doğrusu ile kesişimi E olsun. $AFED$ dörtgeni bir paralelkenardır ve bu sebepten dolayı AFD ve FED üçgenleri aynı çevreye sahiptir. O halde FED ve FCD üçgenleri aynı çevreye sahiptir ve buradan $|FC|+|CE| = |FE|$ gelir. Ancak bu, üçgen eşitsizliğine göre sadece $E = C$ iken mümkündür. Dolayısıyla $|AF| = |CD|$ elde edilir. Benzer şekilde $|FB| = |CD|$ bulunur. Sonuç olarak $|CD| = |AB|/2 = 6$ olmalıdır. AFD, FDC ve FCB üçgenlerinin her biri eşkenar üçgen iken de $|CD| = 6$ olur.

22. $\{3, 12, 14, 37, 39, 41, 82\}$ kümesinin boş olmayan alt kümelerinden kaç tanesinin elemanları toplamı 9 ile tam bölünür?

Cevap: 16. $A = \{3, 12, 39\}$, $B = \{14, 41\}$ ve $C = \{37, 82\}$ olsun. A'daki elemanların 9 ile bölümlerinden kalanlar 3, B'deki elemanların 9 ile bölümlerinden kalanlar 5 ve C'deki elemanların 9 ile bölümlerinden kalanlar 1. Bir alt kümenin elemanları toplamının 9 ile bölünebilmesi için toplamın 3 ile de bölünmesi gerekir. Bu sebepten dolayı kolayca görüleceği üzere elemanları toplamı 9 ile bölünen bir alt kümede B ve C kümelerinden eşit sayıda eleman bulunmalıdır. B ve C'den hiç eleman yoksa, A'daki üç eleman da yer almalı; $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ durum. B ve C'den birer eleman varsa, A'dan da bir eleman yer almalı; $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ durum. B ve C'den ikişer eleman bulunuyorsa, A'dan da iki eleman yer almalı; $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ durum. Sonuç olarak toplam $1 + 12 + 3 = 16$ tane elemanları toplamı 9 ile tam bölünen alt küme vardır.

23. x, y ve z birbirinden farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x + 3y \\ y^2 + z^2 &= 3y + 2z \\ z^2 + x^2 &= 3z + 2x \end{aligned}$$

ise, $x + 2y + 3z$ kaçtır?

Cevap: 8. Birinci eşitlikten ikinci eşitlik çıkarılırsa $x^2 - z^2 = 2(x - z)$ ve dolayısıyla $(x - z)(x + z - 2) = 0$ elde ederiz. Buradan da $x \neq z$ olduğu için $x + z = 2$ bulunur. Birinci eşitlikten üçüncü eşitlik çıkarılırsa $y^2 - z^2 = 3(y - z)$ ve dolayısıyla $(y - z)(y + z - 3) = 0$ bulunur. $y \neq z$ olduğundan $y + z = 3$ elde edilir. Sonuç olarak $x + 2y + 3z = (x + z) + 2(y + z) = 2 + 2 \cdot 3 = 8$'dir. $x = 2, y = 3$ ve $z = 0$ iken de sorudaki tüm eşitlikler sağlanır ve $x + 2y + 3z = 8$ olur.

24. $1, 2, \ldots, 9$ sayıları 3×3 bir tablonun birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, hem herhangi bir satırdaki sayıların toplamı hem de herhangi bir sütundaki sayıların toplamı 3 ile tam bölünecek şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

Cevap: $4 \cdot 6^4$. Üç tam sayının toplamı 3 ile tam bölünüyorsa, bu üç sayının 3 ile bölümlerinden kalanlar ya aynıdır ya da farklıdır. Dolayısıyla 3 ile bölümlerinde aynı kalanı veren sayılar ya aynı satır veya sütunda yer almalılar, ya da farklı satır ve sütunlarda yer almalılar. Aynı satırlarda yer alırlarsa, bir satırdaki sayıları $3! = 6$ şekilde yerleştirebiliriz. Satırları da kendi aralarında $3! = 6$ şekilde sıralayabiliriz. Sonuç olarak 6^4 durum bulunur. Aynı sütunlarda yer alırlarsa da 6^4 durum bulunur. Farklı satır ve sütunlarda yer alıyorlarsa, önce 0 kalanı verenlerin yerlerini belirleyelim. İlk satırdaki 3 yerden birini seçelim. İkinci satırda seçebileceğimiz 2 yer olur ve üçüncü satırda 1 yer bulunur. Sonra 1 kalanı verenlerin yerlerini belirleyelim. İlk satırda 2 yer mevcuttur, ikinci ve üçüncü satırlarda ise birer yer mevcuttur. 2 kalanını vernlerin yerleri de tek türlü belirlenmiş olur ve koşullar sağlanır. Aynı kalanı verenler kendi içlerinde $3! = 6$ şekilde yer alabilirler. Dolayısıyla bu durumda toplam $2 \cdot 6^4$ mümkün yerleştirme vardır. Sonuç olarak cevap $6^4 + 6^4 + 2 \cdot 6^4 = 4 \cdot 6^4$'tür.

25. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde E ve F noktaları sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktalarıdır. $[AE]$ doğru parçası üzerinde bir K noktası ve $[AF]$ doğru parçası üzerinde bir L noktası $|AK| = |LF|$ olacak şekilde alınmıştır. $[KL]$ doğru parçasının orta noktası M olmak üzere, CM

ve EF doğrularının kesişim noktası N dir. $|MN| = 1$ ise, $|CN|$ kaçtır?

Cevap: 2. Genelliği bozmadan $|AL| \geq |AK|$ varsayabiliriz. K'den geçip BC'ye paralel olan doğrunun AC ile kesişimi P, M'den geçip BC'ye paralel olan doğrunun AC ile kesişimi Q olsun. $|LF| = |AK| = |AP| = x$ ve $|AL| = |KE| = y$ diyelim. Bu durumda $|BE| = |FC| = x + y$, $|PL| = y - x$, $|PQ| = |QL| = (y - x)/2$ ve $|QF| = (y - x)/2 + x = (y + x)/2 = |CF|/2$ bulunur. MQ ve EFdoğruları paralel oldukları için $|CN|/|NM| = |CF|/|FQ| = 2$ ve sonuç olarak $|CN| = 2$ elde edilir.

26. Farklı 9 pozitif tam sayının tam olarak ikisi 2 ile, tam olarak üçü 3 ile, tam olarak beşi 5 ile ve tam olarak yedisi 7 ile tam bölünmektedir. Buna göre bu sayıların en büyüğünün alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 105. 5 ile bölünen beş, 7 ile bölünen yedi sayı var. $5 + 7 = 12$ olduğuna göre, en az $12 - 9 = 3$ sayı hem 5 hem de 7 ile tam bölünüyor. O zaman bu üç sayıdan en büyük olanı en az $35 \cdot 3 = 105$ olacaktır. Şimdi de 105 sayısı için koşulları sağlayan bir örnek verelim: $5, 7, 10, 21, 35, 49, 63, 70, 105$.

27. A ve B noktaları arasındaki düz bir yolda sabit hızlarla koşan X, Y, Z ve T koşucularının A noktasından aynı anda başlayıp B noktasına varmaları ve hiç beklemeden aynı yol üzerinden A noktasına geri dönmeleri gerekmektedir. X in hızı Y nin hızının 5 katıdır. Z nin hızı Y nin hızının 6 katıdır. T nin hızı Y nin hızından küçüktür. T koşucusu, yarışma başladıktan 1 dakika sonra X ile, 4 dakika sonra Y ile ve p dakika sonra Z ile karşılaşmıştır. Buna göre p kaçtır?

Cevap: 16/19. A ve B arasındaki yolun uzunluğu L metre, T ve Y koşucularının hızları sırasıyla u ve v metre/dakika olsun. O halde X'in ve Z'nin hızları sırasıyla $5v$ ve $6v$'dir. 1 dakika sonunda T'nin aldığı yol u metre, X'in aldığı yol ise $5v$ metre olacaktır. Buna göre $2L = u + 5v$ elde edilir. 4 dakika sonunda T'nin aldığı yol $4u$ metre ve Y'nin aldığı yol $4v$ metredir ve buradan $2L = 4u + 4v$ gelir. Sonuç olarak $v = 3u$ bulunur. p dakika sonra T pu metre ve Z $6pv = 18u$ metre yol almıştır. O zaman $2L = u+5v = u+15u = 16u = p(u+18u)$ olur ve $p = 16/19$ bulunur.

28. Bir koordinat düzleminde $(0, 0)$ noktası kırmızıya boyanmıştır. Kırmızıya boyalı her (x, y) noktası için $(x + 7, y)$, $(x - 13, y - 6)$ ve $(x + 1, y + 8)$

noktaları da kırmızıya boyalıdır. Buna göre $(2021, 2021)$, $(2020, 2020)$, $(26, 2021)$, $(2021, 26)$ ve $(2021, 2020)$ noktalarından kaç tanesi kesinlikle kırmızıya boyalıdır?

Cevap: 2. x ve y tam sayılar olmak üzere $7|x - y$ ve y çift sayı ise, (x, y) noktasına *güzel* nokta diyelim. Kolayca görüleceği üzere, (x, y) güzel ise $(x + 7, y)$, $(x - 13, y - 6)$ ve $(x + 1, y + 8)$ noktalarının üçü de güzeldir. Öte yandan (x, y) güzel değil ise, $(x - 7, y)$, $(x + 13, y + 6)$ ve $(x - 1, y - 8)$ noktalarının hiçbiri güzel değildir. O zaman $(0, 0)$ güzel olduğu için kesinlikle kırmızı olan bir nokta güzel olmak zorundadır. (Şu ana kadarki bulgularımızdan her güzel sayı kesinlikle kırmızıdır diyemeyiz). Buna göre $(2021, 2021)$, $(26, 2021)$ ve $(2021, 2020)$ kırmızıya boyalı olmak zorunda değildir.
Şimdi de $(2020, 2020)$ ve $(2021, 26)$'nin kırmızıya boyalı olduğunu gösterelim. $(0, 0) \to (7, 0) \to (14, 0) \to (1, -6) \to (2, 2) \to \cdots \to (4, 4) \to \cdots \to (2020, 2020)$ geçişlerinden dolayı $(26, 26)$ ve $(2020, 2020)$ kırmızıdır. $(26, 26) \to (33, 26) \to (40, 26) \to \cdots \to (2021, 26)$ geçişlerinden dolayı da $(2021, 26)$ da kırmızıdır.

29. $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun iç bölgesinde birbirlerine dıştan teğet olan ω_1 ve ω_2 çemberleri; ω_1 çemberi $[AB], [CD]$ ve $[DA]$ kenarlarına, ω_2 çemberi ise $[AB], [BC]$ ve $[CD]$ kenarlarına teğet olacak şekilde çizilmiştir. $ABCD$ yamuğunun alanı 12 ve $|AD| + |BC| = 8$ ise, $|AB| + |CD|$ kaçtır?

Cevap: 12. AB ve CD doğruları paralel olduğundan ω_1 ve ω_2 çemberlerinin yarıçapları eşittir. Bu yarıçapa r dersek yamuğun yüksekliği $2r$ olur. Teğetliklerden $|AB| + |CD| = |AD| + |BC| + 4r$ elde ederiz. Yamuğun alanı $(|AB| + |CD|)/2 \cdot 2r = (|AB| + |CD|)r = (8 + 4r)r = 12$ olacağından $r = 1$ olmalıdır. Bu ise $|AB| + |CD| = 8 + 4r = 12$ olduğunu gösterir.

30. a, b ve c tam sayılar olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ eşitliğini sağlayan yalnızca bir x gerçel sayısı varsa, (a, b, c) üçlüsüne *güzel üçlü* diyelim. $1 \leq a, b, c \leq 100$ ve $\text{obeb}(a, b, c) = 1$ koşullarını sağlayan kaç tane (a, b, c) güzel üçlüsü vardır?

Cevap: 53. Denklemin yalnızca bir kökü olması için gerek ve yeter koşul $b^2 = 4ac$ olmasıdır. Bu durumda b çifttir, $b = 2b_1$ dersek $b_1^2 = ac$ elde ederiz. $\text{obeb}(a, c) = 1$ olduğundan a ve c tam kare olmalıdır. u ve v pozitif tam sayılar olmak üzere $a = u^2$ ve $c = v^2$ dersek $b = 2uv$ bulunur. Dolayısıyla, $u, v \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, $\text{obeb}(u, v) = 1$ ve $uv \leq 50$ olan (u, v) ikililerinin sayısını bulmalıyız. $u = v$ olan sadece $(1, 1)$ vardır. $u < v$ olan durumların sayısını bulalım. $u = 1$ ise, $v \in \{2, 3, \dots, 10\}$, 9 durum. $u = 2$ ise, $v \in \{3, 5, 7, 9\}$, 4 durum. $u = 3$ ise, $v \in \{4, 5, 7, 8, 10\}$, 5 durum. $u = 4$ ise, $v \in \{5, 7, 9\}$, 3 durum. $u = 5$ ise, $v \in \{6, 7, 8, 9\}$, 4 durum. $u = 6$ ise, $v = 7$ olmalı, 1 durum. $u \geq 7$ için çözüm yoktur, çünkü $7 \cdot 8 > 50$. O halde $u < v$ için $9 + 4 + 5 + 3 + 4 + 1 = 26$ çözüm vardır. Benzer biçimde $u > v$ için de 26 çözüm gelir. Sonuç olarak cevap $1{+}26{+}26 = 53$'tür.

31. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $a^2 - b^2 = 1$ ise, $(3a + b)^2$ en az kaç olabilir?

Cevap: 8. Eşitlik $a = 3\sqrt{2}/4$ ve $b = -\sqrt{2}/4$ iken sağlanır.
$a + b = u$ ve $a - b = v$ dersek $3a + b = 2u + v$ ve $uv = 1$ olur. Buradan da $(2u + v)^2 = (2u - v)^2 + 8uv \geq 8uv = 8$ elde ederiz.

32. Aslı ve Zehra başlangıçta her birinin üzerinde 1 yazılı olan n taş ile bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor ve oyuncular sırayla hamle yapıyorlar. Sırası gelen oyuncu taşlardan birinin üzerindeki sayıyı silip yerine sildiği sayının 1 veya 2 fazlasını yazıyor. Taşlardan birinin üzerine 29 yazan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun $n = 4, 5, 6, 12, 29$ değerleri için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaç tanesini kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 2. Oyunu, n sayısının çift olduğu durumlarda Zehra'nın n sayısının tek olduğu duurmlarda ise Aslı'nın kazandığını gösterelim. Herhangi bir taş üzerine 27 ya da 28 yazan oyuncunun oyunu kaybedeceği açıktır.
n sayısının çift değerlerinde Zehra taşları çiftlere ayırarak eşliyor ve Aslı bir taşın üzerine hangi sayıyı yazarsa yazsın Zehra o taşın eşinin üzerine de aynı sayıyı yazıyor ve dolayısıyla 27 veya 28 sayısının ilk olarak Aslı tarafından yazılmasını garantileyerek oyunu kazanıyor.
n sayısının tek değerlerinde Aslı bir taş seçiyor ve kalan taşları çiftlere ayırarak eşliyor. Aslı ilk hamlesinde seçtiği taşın üzerine 2 sayısını yazıyor. Bundan sonra Aslı, $a = 1, 2$ olmak üzere, Zehra'nın seçilmiş taşın üzerindeki sayıyı a artırdığı her hamleden sonra aynı sayıyı $3 - a$ artırıyor. Zehra seçilmemiş bir taşın üzerine hangi sayıyı yazarsa yazsın Aslı o taşın eşinin üzerine de aynı sayıyı yazıyor. Bu durumda $2 + 3k \neq 27, 28$ olduğuna göre, Aslı 27 veya 28 sayısının, seçilmiş veya seçilmemiş taşlardan birinin üzerine ilk olarak Zehra tarafından yazılmasını garantileyerek oyunu kazanıyor.