

31. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
20 Aralık 2023

1. Sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı için

$$\frac{n^2 + m^2}{m^4 + n} = k$$

olacak şekilde m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını gösteriniz.

2. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. BPC üçgeninin çevrel çemberine P noktasında içten teğet olan ω_A ve dıştan teğet olan Γ_A çemberleri, ABC üçgeninin çevrel çemberine de sırasıyla A_1 ve A_2 noktalarında içten teğettir. B_1, B_2 ve C_1, C_2 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. O noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezi olmak üzere, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ve OP doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

3. Rakamlarının biri 1, biri 2, ..., biri 9 olan 9 basamaklı tüm sayılara *dengeli* sayı diyelim. Tüm dengeli sayıların yan yana ve küçükten büyüğe doğru yazılarak oluşturduğu rakam dizisi S olsun. S dizisindeki k ardışık terimden oluşan herhangi iki alt dizinin birbirinden farklı olmasını sağlayan en küçük k değerini bulunuz.

31. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
21 Aralık 2023

4. Başlangıçta tahta üzerinde her birinin 31 koordinatı olan 31 adet

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$$

31-lileri yazılmıştır. Her işlemde, tahtada bulunan $(a_1, a_2, \dots, a_{31})$ ve $(b_1, b_2, \dots, b_{31})$ 31-lileri seçiliyor ve $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_{31} + b_{31})$ 31-lisi de tahtaya yazılıyor. En az kaç işlem sonucunda tahtada

$$(0, 1, 1, \dots, 1), (1, 0, 1, \dots, 1), \dots, (1, 1, 1, \dots, 0)$$

31-lilerinin tümü yer alabilir?

5. 23 gerçel sayıdan oluşan bir kümenin, boş olmayan ve elemanlarının çarpımı rasyonel sayı olan alt kümelerinin sayısı tam olarak 2422 olabilir mi?

6. Bir ABC üçgeninin BC , AC , AB kenarları üzerinde sırasıyla D , E , F noktaları $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ve $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$ olacak şekilde alınıyor. AEF üçgeninin çevrel çemberi, AD doğrusu ile ikinci kez R noktasında ve ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasından çizilen teğet ile ikinci kez S noktasında kesişiyor. EF doğrusu, BC ve SR doğruları ile sırasıyla L ve T noktalarında kesişiyor. SR doğrusunun $[AB]$ doğru parçasını ortalaması için gerek ve yeter koşulun BS doğrusunun $[TL]$ doğru parçasını ortalaması olduğunu gösteriniz.