TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

13. ULUSAL İLKÖĞRETİM
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2008

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. ABC üçgeninde $G \in [AC]$, $F \in [BG]$, $D \in [AG]$, $E \in [GC]$, $[DF]//[AB]$, $[FE]//[BC]$, $|GF| = |FB|$ ve $|DE| = 13$ ise, $|AC|$ kaç birimdir?

Cevap: 26. $DF \parallel AB$ ve $|GF| = |FB|$ olduğundan $|DG| = \dfrac{|AG|}{2}$ olur. Benzer şekilde $|EG| = \dfrac{|CG|}{2}$ elde ederiz. $|DE| = |DG| + |EG|$ ve $|AC| = |AG| + |CG|$ olduğundan $|AC| = 2 \cdot 13 = 26$ bulunur.

2. Birbirinden farklı x ve y gerçel sayıları $x^2 - 2008x = y^2 - 2008y$ eşitliğini sağlıyorlarsa $x + y$ kaçtır?

Cevap: 2008. $x \neq y$ olduğuna göre, $x^2 - y^2 = 2008(x - y)$ den $x + y = 2008$ gelir.

3. Ali ve Burcu'nun, bazıları siyah, bazıları beyaz olmak üzere toplam 70 topu var. Ali'nin toplarının $\dfrac{5}{9}$ u ve Burcu'nun toplarının $\dfrac{7}{17}$ si siyah ise, Burcu'nun beyaz top sayısı Ali'nin beyaz top sayısından kaç fazladır?

Cevap: 4. Burcu'nun top sayısı 17 nin katı olduğundan alabileceği değerler 17, 34, 51, 68 dir. Buna göre Ali'nin top sayısı 53, 36, 19, 2 olabilir. Ali'nin top sayısı 9 un katı olduğundan Ali'nin 36, Burcu'nun 34 topu var. Sonuç olarak cevap $34 \cdot \dfrac{10}{17} - 36 \cdot \dfrac{4}{9} = 4$ olur.

4. ADE üçgeninde $B \in [AE]$, $C \in [DE]$ noktaları $ABCD$ kirişler dörtgeni olacak şekilde seçilsin. $[BD] \cap [AC] = \{F\}$, $s(\widehat{EAC}) = 21^o$ ve $s(\widehat{AED}) = 33^o$ ise, $s(\widehat{AFD})$ kaç derecedir?

Cevap: 75. $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğundan $s(\widehat{CDB}) = s(\widehat{CAB}) = 21°$ olur. $s(\widehat{AFD}) = s(\widehat{EAC}) + s(\widehat{AED}) + s(\widehat{EDB})$ olduğundan,

$$s(\widehat{AFD}) = 21° + 33° + 21° = 75° \text{ bulunur.}$$

5. Farklı n sayı, çember üzerinde, her sayı iki komşusunun çarpımına eşit olacak şekilde dizilebildiğine göre, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 6. Sayılardan biri a olsun. Bu sayıdan başlayarak saat yönündeki sayılar $b, b/a, 1/a, 1/b, a/b$ ve a olmak zorundadır. Buna göre n nin alabileceği en büyük değer 6 olur.

6. Yan yana yazılmış 123456789 rakamlarından bazılarının arasına + işareti koyularak oluşturulan bir toplam aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 144 b) 153 c) 189 d) 375 e) 486

Cevap: 375.

$144 = 12 + 3 + 45 + 67 + 8 + 9$.
$153 = 1 + 23 + 45 + 67 + 8 + 9$.
$189 = 12 + 34 + 56 + 78 + 9$.
$486 = 1 + 2 + 3 + 456 + 7 + 8 + 9$.

$1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ olduğundan oluşturulan her sayı 9 ile bölünecektir. Buna göre, 375 sayısı oluşturulamaz.

7. AB ve CD tabanlı bir $ABCD$ yamuğunun AD kenarı üzerinde P_1, P_2, P_3, P_4 ve BC kenarı üzerinde Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktaları, $AB//P_1Q_1//P_2Q_2//P_3Q_3//P_4Q_4//CD$ ve $A(ABQ_1P_1) = A(P_1Q_1Q_2P_2) = A(P_2Q_2Q_3P_3) = A(P_3Q_3Q_4P_4) = A(P_4Q_4CD)$ olacak şekilde seçiliyor. $|AB| = 1$, $|P_1Q_1| = 2$ ise $|CD|$ kaçtır?

Cevap: 4. $[DA$ ve $[CB$ nin kesişimi E olsun. $AB \parallel P_1Q_1$ ve $|P_1Q_1| = 2|AB|$ olduğundan $A(EP_1Q_1) = 4 \cdot A(EAB)$ olur. $A(EAB) = S$ dersek, $A(ABQ_1P_1) = A(P_1Q_1Q_2P_2) = A(P_2Q_2Q_3P_3) = A(P_3Q_3Q_4P_4) = A(P_4Q_4CD) = 3S$ olur. Buradan, $A(EDC) = 5 \cdot (3S) + S = 16S$ olur. $\dfrac{A(EAB)}{A(EDC)} = \left(\dfrac{|AB|}{|CD|}\right)^2$ olacağından, $\dfrac{1}{16} = \left(\dfrac{1}{|CD|}\right)^2$ ve dolayısıyla $|CD| = 4$ bulunur.

8.

$$\frac{b + 2c - a}{2bc} + \frac{a + 2c - b}{2ac} = \frac{a + b - 2c}{ab}$$

olduğuna göre, $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{10c^2 + 4ab}$ kaçtır?

Cevap: $\dfrac{1}{2}$. Verilmiş eşitliğin her iki tarafını $2abc$ ile çarpıp sadeleştirirsek $a^2 + b^2 = 2ab + 4c^2$ elde deriz. Buna göre, cevap $\dfrac{1}{2}$ olur.

9. Beş tane iki basamaklı birbirinden farklı doğal sayının toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 426. $11+12+13+14+15=60$ ve $95+96+97+98+99=485$. 60 ve 485 arasındaki her sayının beş tane iki basamaklı birbirinden farklı pozitif tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceği açıktır. Buna göre, cevap $485-60+1=426$ olur.

10. Kenar uzunluğu 1 olan $ABCD$ karesinin, sırasıyla, AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde $|AA'|=|BB'|=|CC'|=|DD'|=\frac{1}{3}$ şartını sağlayan A', B', C', D' noktaları seçiliyor. $AC', A'C, BD'$ ve $B'D$ doğrularının sınırlandırdığı karenin alanı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{1}{13}$. D' noktasından BD' doğrusuna inen dikme ayağına F diyelim. İçte oluşan karenin bir kenarı $|D'F|$ uzunluğuna eşittir. Diğer taraftan, $D'FD$ ve DCB' üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla, $\dfrac{|D'F|}{|D'D|}=\dfrac{|DC|}{|DB'|}$ olur. Buradan, $|D'F|=\dfrac{1}{3|DB'|}$ elde ederiz. DCB' dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DB'|^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+1=\dfrac{13}{9}$ olur. Sonuç olarak, içteki karenin alanı $|D'F|^2=\left(\dfrac{1}{3|DB'|}\right)^2=\dfrac{1}{13}$ olur.

11. 1000 den küçük kaç n doğal sayısı için $n^2+8n-85$ ifadesi 101 e bölünür?

Cevap: 9. 101 sayısı $n^2+8n+16=(n+4)^2$ sayısını bölüyor. Buna göre, $101|(n+4)$ ve $n=101k-4$. k nın alabileceği 9 değer bulunuyor: $k=1,2,\dots,9$.

12. A şehri, B şehrinin $60km$ batısındadır. A dan bir araba ve B den ikinci bir araba aynı anda doğuya doğru yola çıkıyorlar. Bir süre sonra birinci araba ikinciye yetişiyor. Birinci arabanın hızı $10km/saat$, ikinci arabanın hızı $8km/saat$ daha fazla olsaydı, birinci araba, ikinci arabayı aynı yerde fakat 1 saat daha erken yakalayacaktı. Birinci arabanın hızı kaç $km/saat$ tir?

Cevap: 50. Birinci arabanın hızı v $km/saat$, ikinci arabanın hızı u $km/saat$ olmak üzere, $t=v-u$ olsun. $\dfrac{60}{t}=\dfrac{60}{t+2}+1$ olduğuna göre, $t^2+2t-120=0$ ve $t=10$. Demek ki birinci araba ikinci arabaya 6 saatte yetişmiştir ve arabaların hızları arttırılırsa, birinci araba ikinci arabaya 5 saatte yetişecektir. Buna göre, $6v=5(v+10)$ ve $v=50$ olur.

13. ABC ikizkenar üçgenininde $|AB|=|AC|$ ve $s(\widehat{A})=50^o$ dir. Bu üçgenin AC kenarı ve AD kenarortayı üzerinde, sırasıyla, C ve D den farklı N ve M noktaları, $|MN|=|MB|$ olacak biçimde alınmıştır. $\widehat{MBN}$ açısı kaç derecedir?

Cevap: 25°. M noktası, ABC ikizkenar üçgeninin AD kenarortayı üzerinde yer aldığından $|MB| = |MC|$ bulunur. Dolayısıyla, M noktası NBC üçgeninin çevrel merkezi olup, $s(\widehat{MBN}) = 90° - s(\widehat{NCB}) = 90° - \dfrac{180° - s(\widehat{A})}{2} = 25°$ elde ederiz.

14. Kenar uzunluğu n birim olan bir kübün yüzleri boyanıyor, ve küp, n^3 adet birim küp oluşacak şekilde parçalanıyor. Kaç $n \geq 2$ değeri için, tek yüzü boyanmış birim küplerin sayısı hiç boyanmamış birim küplerin sayısına eşit olur?

Cevap: 2. Tek yüzü boyanmış birim küplerin sayısı $6(n-2)^2$, hiç boyanmamış birim küplerin sayısı $(n-2)^3$ olduğundan $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ olur ve buradan $n = 2, 8$ olarak iki çözüm gelir.

15. Ahmet tahtaya, herhangi ikisinin farkı iki eşit rakamdan oluşan bir sayı olmayacak şekilde, en fazla kaç iki basamaklı sayı yazabilir?

Cevap: 11. Sayıların herhangi ikisinin farkı iki eşit rakamdan oluşan bir sayı olmaması için gerek ve yeter şart bu sayıların 11 modunda kalanlarının birbirinden farklı olmasıdır. Buna göre cevap 11 olur.

16. Kare şeklinde bir kağıdın üzerine 1 birim yarıçaplı bir çember nasıl çizilirse çizilsin, özdeş bir çemberin daha, ilk çemberle en fazla bir noktada kesişerek çizilebilmesi için kağıdın kenar uzunluğunun en az kaç birim olması gerekir?

Cevap: $2(\sqrt{2}+1)$. Kare kağıdın köşe noktalarına sırasıyla A, B, C, D, karenin merkezine O ve bir kenarının uzunluğuna a diyelim. Merkezi O, kenar uzunluğu $a-2$ ve kenarları $ABCD$ karesinin kenarlarına paralel olan kareye $EFGH$ diyelim. Kağıdın üzerine çizilebilecek 1 birim yarıçaplı herhangi bir çemberin merkezi $EFGH$ karesinin içinde veya üzerinde yer almak zorundadır. İki tane birim çemberin en fazla bir noktada kesişmesi içinse, merkezleri arasındaki uzaklığın en az 2 birim olması gerekir. Öncelikle, $a < 2(\sqrt{2}+1)$ ise, merkezi O olan birim çemberi çizdiğimizde, kağıdın üzerinde yeni çizilecek herhangi bir çemberin merkezi ile O arasındaki uzaklık, $\dfrac{a-2}{\sqrt{2}}$ den küçük veya eşit olur, dolayısıyla O ile arasındaki mesafe 2 den küçük olur. Diğer taraftan, $a = 2(\sqrt{2}+1)$ ise, genelliği bozmadan ilk çizilen birim çemberin merkezini EOF üçgeninin içinde veya üzerinde alalım. H merkezli birim çember ile ilk çizilen çemberin merkezleri arasındaki uzaklık $|OH|$ uzunluğundan, yani 2 den büyük veya eşit olur. Sonuç olarak, kağıdın kenar uzunluğu en az $2(\sqrt{2}+1)$ olmalıdır.

17. x, y, z gerçel sayıları $x^2 - 2|x| = y$, $y^2 - 2|y| = z$ ve $z^2 - 2|z| = x$ eşitliklerini sağlıyorsa, $x + y + z$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: -3. Denklemleri $(|x| - 1)^2 = y + 1$, $(|y| - 1)^2 = z + 1$, $(|z| - 1)^2 = x + 1$ şeklinde yazıp taraf tarafa toplarsak,

$$x + y + z = (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 + (|z| - 1)^2 - 3 \geq -3$$

elde ederiz. Eşitlik durumu $x = y = z = -1$ iken sağlanır.

18. Öğretmen, tahtaya 8 pozitif tam sayı yazıyor ve Betül bu sayılardan ikisinin 2 ye, üçünün 3 e, dördünün 4 e, beşinin 5 e, altısının 6 ya, yedisinin 7 ye ve sekizinin 8 e bölündüğünü söylüyor. Betül en az kaç hata yapmıştır?

Cevap: 3. n ye bölünen sayıların sayısını $b(n)$ ile gösterirsek, $b(8) \leq b(4) \leq b(2)$ ve $b(6) \leq b(3)$ eşitsizliklerini elde ederiz. Buna göre, $b(8), b(4), b(2)$ sayılarından en az ikisi, $b(6), b(3)$ sayılarından da en az biri yanlış hesaplanmıştır ve toplam hata sayısı en az 3 tür. Tahtaya yazılmış sayıların $14, 21, 21, 30, 35, 35, 35, 35$ olduğu durumda hata sayısı tam olarak 3 olacaktır.

19. B açısı dik olan ABC dik üçgeninde $[BD]$ kenarortayının uzantısı ile $[AC]$ ye A noktasında dik olan bir d doğrusunun kesişme noktası E dir. $s(\widehat{AEB}) = 18^o$ ve $|AB| = 12$ olduğuna göre $|DE|$ kaç birimdir?

Cevap: 24. Öncelikle, $|DB| = |DA|$ ve $s(\widehat{DBA}) + s(\widehat{DAB}) = 180° - 90° - 18°$ olduğundan $s(\widehat{DBA}) = s(\widehat{DAB}) = 36°$ olur. Hipotenüsü $[DE]$ olan DAE dik üçgeninde $[DE]$ nin orta noktasına F dersek, $|DF| = |EF| = |AF|$ olur. Dolayısıyla, $s(\widehat{AFD}) = 2 \cdot s(\widehat{AEB}) = 36°$ olup, $|AF| = |AB| = 12$ elde ederiz. Buradan, $|DE| = 2 \cdot |AF| = 24$ bulunur.

20. $a = -\dfrac{9}{10}$ ve $b = (a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$ ise $19b + 10a^8$ kaçtır?

Cevap: 10. $b(a - 1) = a^8 - 1$ olduğundan, $b\left(-\dfrac{9}{10} - 1\right) = a^8 - 1$ ve buradan da $19b + 10a^8 = 10$ olur.

21. n ve $n + 1$ pozitif tam sayılarının her ikisinin de rakamlarının toplamı 53 e bölünüyorsa, n en az kaç basamaklıdır?

Cevap: 12. n sayısının birler basamağının 9 olacağı açıktır. n sayısının basamaklarının toplamı $s(n)$ olsun. n sayısında sondaki 9 ların sayısı k ise,

$s(n+1) - s(n) = 9k - 1$ olacaktır. Buna göre $9k - 1 \equiv 0 \pmod{53}$ ve $k \geq 6$ olur. $n+1$ sayısında sondaki 0 rakamlarının atılmasıyla elde edilen sayının da rakamlarının toplamı 53 e bölünüyor. Buna göre, bu sayı da en az 6 basamaklıdır. Sonuç olarak n en az 12 basamaklı olacaktır.

$n = 899998999999$ sayısının rakamlarının toplamı 106, $n+1$ sayısının rakamlarının toplamı 53 tür. Buna göre cevap $n = 12$ olur.

13. ULUSAL İLKÖĞRETİM MATEMATİK OLİMPİYATI SINAVI - 2008

İkinci Bölüm

26 Nisan 2008 Cumartesi, 11.00-12.15

1. ABC dik üçgeninde $s(\widehat{C}) = 90^o$ olmak üzere, D ile içteğet çemberinin merkezini gösterelim. A ve D den geçen doğrunun CB kenarı ile kesişim noktası N olsun. $|CA| + |AD| = |CB|$ ve $|CN| = 2$ ise, $|NB|$ kaç birimdir?

Cevap: 4. $[CA$ ışını üzerinde, A noktası C ile E arasında olacak şekilde $|AE| = |AD|$ şartını sağlayan E noktasını alalım. $|CA| + |AD| = |CB|$ olduğundan $|CE| = |CA| + |AE| = |CA| + |AD| = |CB|$ olur. Dolayısıyla ECB ikizkenar dik üçgen olup, $s(\widehat{AEB}) = 45°$ bulunur. Diğer taraftan, D noktası iç teğet çemberin merkezi olduğundan $s(\widehat{ADB}) = 90° + \dfrac{s(\widehat{C})}{2} = 135°$ olur. Dolayısıyla, $EADB$ kirişler dörtgenidir. $s(\widehat{CAB}) = 4\alpha$ diyelim. D noktası açıortayların kesişim noktası olduğundan $s(\widehat{DAC}) = 2\alpha$ olup, $|AE| = |AD|$ eşitliğinden $s(\widehat{AED}) = s(\widehat{ADE}) = \alpha$ elde ederiz. Buradan, $EADB$ kirişler dörtgeninde $s(\widehat{ABD}) = s(\widehat{AED}) = \alpha$ bulunur. BD doğrusu $\widehat{ABC}$ açısının açıortayı olduğundan, $s(\widehat{ABC}) = 2 \cdot s(\widehat{ABD}) = 2\alpha$ olup, $4\alpha + 2\alpha = 90°$ ve $\alpha = 15°$ elde ederiz. Dolayısıyla, CAB üçgeni $90° - 60° - 30°$ üçgenidir. Sonuç olarak, açıortay teoreminden $\dfrac{|NC|}{|NB|} = \dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{1}{2}$ olup, $|NB| = 2|NC| = 4$ bulunur.

2. $4^x + 3^y = z^2$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesindeki tüm çözümlerini bulunuz.

Cevap: Tek çözüm $(x, y, z) = (2, 2, 5)$ tir. $3^y = (z - 2^x)(z + 2^x)$ eşitliğinden $z - 2^x$ ve $z + 2^x$ sayılarının ikisi de 3 ün tam kuvveti olmak zorundadır. Buradan, $z - 2^x = 3^t$ dersek, $3^{y-t} - 3^t = 2^{x+1}$ elde ederiz. Dolayısıyla, $3^t(3^{y-2t} - 1)$ sayısının 2 dışında asal böleni olamayacağından $t = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak, $z = 2^x + 1$ ve $3^y = 2^{x+1} + 1$ bulunur. x bir pozitif tam sayı olduğundan, $3^y \equiv 1 \pmod 4$ olup, y nin çift bir sayı olduğu görülür. $y = 2s$ dersek, $2^{x+1} = (3^s - 1)(3^s + 1)$ elde ederiz. $3^s - 1$ ve $3^s + 1$ sayılarının ikisi de 2 nin tam kuvveti olmak zorundadır. Bu iki sayının farkı 2 olduğundan, sadece $3^s - 1 = 2$ ve $3^s + 1 = 4$ olabileceği açıktır. Buradan, $s = 1$, $y = 2$, $x = 2$ ve $z = 5$ sonucu bulunur.

3. Bir masa üstündeki 24 tane bardaktan tam olarak üç tanesi ters çevrilmiştir. Her işlemde herhangi dört bardağı çevirebiliyoruz. En fazla 100 işlem yaparak bütün bardakları düz hale getirilebilir miyiz?

Cevap: Tüm bardaklar düz hale getirilemez. Her işlemde ters çevrilmiş bardak sayısı çift sayıda değişiyor. Değişim sayısı $-4, -2, 0, 2, 4$ olabiliyor. Buna göre, ters çevrilmiş bardak sayısı hep başlangıçtaki gibi tek sayı kalacak ve sıfır olmayacaktır.