TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

16. ULUSAL İLKÖĞRETİM MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAV SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2011

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Bir bardakta bulunan 100 gram şekerli suyun kütlece %98 i sudur. Bir süre sonra suyun buharlaşması sonucu suyun kütlece oranı %96 ya düştüğünde şekerli suyun kütlesi kaç gram olur?

Cevap: 50. Başlangıçta bardakta 2 gr şeker bulunuyor. Buharlaşmadan sonra şeker, şekerli suyun kütlesinin 4 % nü oluşturuyor. Buna göre cevap $2 \cdot 25 = 50$.

2. $m \leq n$ olmak üzere; en büyük ortak bölenleri 11, toplamları da 165 olan kaç tane (m, n) pozitif tam sayı ikilisi vardir?

Cevap: 4. $a \leq b$, $\text{obeb}(a, b) = 1$, $m = 11a$ ve $n = 11b$ olacak şekilde a ve b pozitif tam sayıları bulunur. $165 = m + n = 11(a + b) \Rightarrow a + b = 15$. Şartı sağlayan (a, b) ikilileri $(1, 14), (2, 13), (5, 9)$ ve $(7, 8)$ dir. Koşullara uygun (m, n) ikilileri $(11, 154), (22, 143), (55, 99)$ ve $(77, 88)$ dir.

3. $ABCD$ bir dışbükey dörtgen olmak üzere, ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir E noktası $|BE| = |AD|$, $|AE| = |CD|$ ve $s(\widehat{AEB}) = s(\widehat{ADC})$ koşullarını sağlıyor. $s(\widehat{EAC}) = 30°$ ve $s(\widehat{ACD}) = 40°$ ise, $s(\widehat{BCD})$ nedir?

Cevap: 95°. Verilen kenar ve açı eşitliklerinden $\triangle ADC \cong \triangle BEA$ olur. Buradan da $|AC| = |AB|$ ve $\angle EAB = \angle ACD = 40°$ elde ederiz. $\triangle ABC$ bir ikizkenar üçgen olduğundan $\angle ACB = 55°$ ve buradan da $\angle BCD = 95°$ olur.

4. A ve B harfleri rakamları belirtmek üzere, on tabanına göre yazılımı $3A4B$ olan bir sayının 45 ile bölümünden kalanın 17 olmasını sağlayan kaç (A, B) ikilisi vardır?

Cevap: 2. $45 = 5 \cdot 9$, $17 \equiv 2 \pmod 5$ ve $17 \equiv 8 \pmod 9$. O halde $B = 2$ veya $B = 7$ dir ve $3 + A + 4 + B \equiv 8 \pmod 9$ dir. $\Rightarrow B \in \{2, 7\}$ ve $A + B \in \{1, 10, 19\}$. Şartlara uygun (A, B) ikilileri $(2, 8)$ ve $(7, 3)$ tür.

5. $\{50, 100, 1000, 2000, 2010, 2011, 2012, 3000\}$ kümesinin üç elemanlı kaç altkümesinin elemanları toplamı 3 ile bölünür?

Cevap: 20. Sayıları $\pmod 3$ de yazarsak $\{2, 1, 1, 2, 0, 1, 2, 0\}$ elde ederiz. Altkümenin elemanları toplamının 3 ile bölünmesi için elemanlarının $\pmod 3$ de aynı olması veya $0, 1, 2$ değerlerini alması gerekiyor. Buna göre cevap $1 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 20$ olur.

6. $s(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $[AC]$ köşegeninin orta noktası E dir. $|AE| = |DE|$ ve $s(\widehat{ABD}) = 20^\circ$ ise, $s(\widehat{AED})$ nedir?

Cevap: 40°. E noktası ABC dik üçgeninde hipotenüsün orta noktası olduğundan $|AE| = |BE| = |EC|$ olur. $|AE| = |ED|$ olduğundan E noktasının $ABCD$ dörtgeninin tüm köşelerine uzaklıkları eşit olur. Yani $ABCD$ bir kirişler dörtgenidir. $\angle ABD = \angle ACD = 20^\circ$ ve buradan da $\angle AED = 2\angle ACD = 40^\circ$ elde ederiz.

7. $1^4 + 2^4 + \cdots + 2011^4$ sayısının 16 ile bölümünden kalan nedir?

Cevap: 14. Bir çift sayının dördüncü kuvveti 16 ile bölünür. Bir tek sayının karesi (mod 8)'de 1'e denktir ve dolayısıyla bir tek sayının dördüncü kuvveti (mod 16)'da 1'e denktir. O halde verilen toplam (mod 16)'da 1006'ya denktir ve $1006 \equiv 14 \pmod{16}$ dır.

8. Başlangıçta ellerinde 5, 10, 15, 20 ve 25 şeker bulunan beş öğrenciden her adımda biri elindeki şekerlerin bir kısmını diğer öğrenciler arasında eşit olarak paylaştırıyor. En az kaç adımda öğrencilerin ellerindeki şekerlerin sayısı eşitlenebilir?

Cevap: 4. İlk önce adım sayısının 4'den daha az olamayacağını gösterelim. Son hamleden önce 4 öğrencinin şeker sayısı aynı olmak zorundadır. Bundan önceki hamleden önce 3 öğrencinin şeker sayısı aynı olmak zorundadır. Benzer şekilde devam edersek ispat tamamlanır. Şimdi 4 adım için örnek verelim. Başlangıçta şeker sayısı 5 olan öğrenci 1., 10 olan öğrenci 2.,..., 25 olan öğrenci 5. olsun. Birinci adımda 2. öğrenci birer şeker dağıtıyor. İkinci adımda 3. öğrenci ikişer şeker dağıtıyor. Üçüncü adımda 4. öğrenci üçer şeker dağıtıyor. Dördüncü adımda 5. öğrenci dörder şeker dağıtıyor. Buna göre tüm öğrencilerin 15'er şekeri oluyor.

9. $|AB| = 16$ ve $|BC| = 24$ olan bir ABC üçgeninin B köşesine ait içaçıortayının üstündeki bir D noktası $s(\widehat{BDC}) = 90^\circ$ koşulunu sağlıyor. $[AC]$ nin orta noktası E ise, $|DE|$ nedir?

Cevap: 4. CD ve AB doğruları F de kesişsin. $BD \perp FC$ ve $\angle FBD = \angle CBD$ olduğundan $|FB| = |BC| = 24$ ve buradan da $|AF| = 8$ olur. $|FD| = |DC|$ ve $|AE| = |EC|$ olduğundan $ED \parallel AF$ ve $|ED| = |AF|/2 = 4$ buluruz.

10. Bir küpün köşelerine tam sayılar; en çok kaç köşedeki sayı, bu köşeye bir ayrıtla bağlanan üç köşedeki sayıların aritmetik ortalamasından küçük olacak biçimde yerleştirilebilir?

Cevap: 7. Küpün köşelerine yerleştirilmiş sayıların hiçbirinden küçük olmayan olan birini alalım. Bu sayı komşu sayıların ortalamasından küçük olamaz. Buna göre cevap en fazla 7 olabilir. Şimdi 7 için örnek verelim. Küpün tabanındaki köşelere 0, tavanındaki köşelere sırasıyla 1, 1, 3, 9 yazarsak koşullar sağlanır.

11. Ayşe bir kavanozdan her adımda kavanozdaki bilye sayısının bir fazlasının yarısı sayıda bilyeyi çıkarıyor. Kavanozu boşaltmak için Ayşe'nin bu işlemi beş kez tekrarlaması gerekiyorsa, başlangıçta kavanozda kaç bilye vardır?

Cevap: 31. Herhangi bir işlem sonucunda kavanozda a bilye kaldıysa bu işlem öncesinde kavanozda $2a+1$ bilye olmak zorundadır. Buradan kavanozda 5. işlemden önce 1, 4. işlemden önce 3, 3. işlemden önce 7, 2. işlemden önce 15, 1. işlemden önce 31 bilye olduğu elde edilir.

12. E, $ABCD$ paralelkenarının iç bögesinde bir nokta olmak üzere; AE doğrusu $[DC]$ kenarını F noktasında, CE doğrusu da $[AD]$ kenarını G noktasında kesiyor. $|DF|/|FC| = 3/2$, $|DG|/|GA| = 3/5$ ve $\text{Alan}(AEG) - \text{Alan}(CEF) = 9$ ise, $\text{Alan}(ABCD)$ nedir?

Cevap: 80. $\text{Alan}(AEG) - \text{Alan}(CEF) = \text{Alan}(AFD) - \text{Alan}(CGD)$ dir. $\text{Alan}(ABCD) = S$ dersek $\text{Alan}(AFD) = 3S/10$ ve $\text{Alan}(CGD) = 3S/16$ olur. $3S/10 - 3S/16 = 9$ denklemini çözersek $S = 80$ buluruz.

13. İstasyon saatinin her saat başı çaldığı bir istasyondan eşit zaman aralıklarıyla tren geçiyor. Cumartesi günü bir süre boyunca istasyonu seyreden Ali, bu süre boyunca iki trenin geçtiğini görüyor ve bir kez de saatin çaldığını duyuyor. Pazar günü ise, Ali daha uzun bir süre boyunca istasyonu seyrediyor. Ali bu süre boyunca on altı kez saatin çaldığını duyduysa, gördüğü tren sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 7. İki ardışık tren arasındaki süre 2 saatten az olmak zorundadır, aksi takdirde Ali saatin en az iki kez çaldığını duymuş olurdu. Ali istasyonu en az 15 saat seyrettiğine göre, geçen tren sayısı en az 7 olmak zorundadır. Şimdi 7 için örnek verelim. Yeterince küçük bir x pozitif gerçel sayısı için trenler istasyondan $2-x$ saat aralıklarla geçsin.

Ali'nin istasyonu seyrettiği sürenin tam ortası tam saate denk gelip seyredilen iki tren bu sürenin en başlarında ve en sonlarında geçerse, Cumartesi günü koşulları sağlanmış olur. Ahmet'in istasyonu seyrettiği süre $[1, 16]$ saat aralığı olursa saat tam olarak 16 kez çalmış olur ve bu sürede istasyondan sadece 7 tren geçebilir.

14. Aşağıdaki hangi (A, B) ikilisi için, $2x + y = A$ ve $x^2 + y^2 = B$ eşitliklerini sağlayan hiçbir (x, y) gerçel sayı ikilisi yoktur?

a) $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{7}\right)$ b) $\left(1, \frac{2}{9}\right)$ c) $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{3}\right)$ e) $\left(2, \frac{6}{7}\right)$

Cevap: $(4/3,\ 1/3)$. $y = A - 2x$ olacağından $x^2 + (A - 2x)^2 = B$ ve buradan da $5x^2 - 4Ax + A^2 - B = 0$ olur. Çözümün olabilmesi için ancak ve ancak bu ikinci derece denklemin diskriminantının ≥ 0 olması gerekir. $\Delta = (4A)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (A^2 - B) = 20B - 4A^2 \geq 0$ olmalıdır. Yani $A^2 \leq 5B$ olması çözümün olması için gerek ve yeter koşuldur. $(A, B) = (4/3,\ 1/3)$ için bu şart sağlanmazken diğer dört seçenek için şart sağlanır.

15. Kenar uzunluğu 5 birim olan $ABCD$ karesinin $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ kenarları üstünde $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = 3$ olacak biçimde sırasıyla, E, F, G, H noktaları alınıyor. A, B, C, D noktalarından geçen çemberin sınırladığı dairenin alanının, $EFGH$ karesine içten teğet olan çemberin sınırladığı dairenin alanına oranı kaçtır?

Cevap: $50/13$. Pisagor teoreminden büyük dairenin çapı $5\sqrt{2}$ ve küçük dairenin çapı $\sqrt{13}$ olur. Buradan dairelerin alanları oranı $[\pi(5\sqrt{2}/2)^2]/[\pi(\sqrt{13}/2)^2] = 50/13$ olur.

16. Aşağıdaki sayıların en küçüğü hangisidir?

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{11}$ c) $\sqrt{5} - 2$ d) $\frac{1}{4}$ e) $3\sqrt{2} - 4$

Cevap: $\sqrt{5} - 2$. $5 < 81/16$ olduğundan $\sqrt{5} - 2 < 1/4$ tür. $11 < 4\sqrt{10}$ olduğundan $1/4 < \sqrt{10}/11$ dır. $360 < 363$ olduğundan $\sqrt{10}/11 < \sqrt{3}/6$ dır. $12\sqrt{2} < 17$ olduğundan $5 < 22 - 12\sqrt{2}$, $\sqrt{5} < 3\sqrt{2} - 2$ ve buradan da $\sqrt{5} - 2 < 3\sqrt{2} - 4$ tür. Yani bu beş sayıdan en küçüğü $\sqrt{5} - 2$ dir.

17. 16^{2011} sayısının on tabanına göre yazılımında onlar basamağındaki rakam aşağıdakilerden hangisidir?

a) 9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

Cevap: 1. Onlar basamağındaki rakamı bulmak için bu sayının (mod 100)'deki değerini bulmalıyız. $100 = 4 \cdot 25$. 16^{2011} sayısı 4 ile tam bölünür. $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$. $\Rightarrow 16^{2011} = 2^{8044} = (2^{10})^{804} \cdot 2^4 \equiv 16 \pmod{25}$. O halde $16^{2011} \equiv 16 \pmod{100}$ ve bu sayının onlar basamağındaki rakam 1 dir.

18. $[AB]$ ve $[CD]$ bir çemberin farklı çapları olmak üzere, D den bu çembere çizilen teğet AB doğrusunu B ye göre A ile farklı tarafta yer alan bir E noktasında, BC doğrusunu F noktasında kesiyor. $|EB|/|AB| = 5/2$ ve $|DF| = 4$ ise, $|EF|$ nedir?

Cevap: 10. $[AB]$ nin orta noktası O olsun. O çemberin merkezi olacağından $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$ olur. Çemberin yarıçapına x dersek $|OA| = x$ ve $|BE| = 5x$ olur. ODE üçgeninde CF kesenine göre Menelaus teoreminden $(|OC|/|CD|) \cdot (|DF|/|FE|) \cdot (|BE|/|OB|) = 1$ ve buradan da $|EF| = 4 \cdot 5/2 = 10$ buluruz.

19. r pozitif gerçel sayısı $2r - \dfrac{3}{2r+4} = 4$ eşitliğini sağlıyorsa, $r + \dfrac{3}{4r+8}$ nedir?

Cevap: $\sqrt{19} - 2$. $2r + 4 - \dfrac{3}{2r+4} = 8$ olduğundan

$$(2r+4)^2 + \frac{9}{(2r+4)^2} = 70 \text{ ve } (r+2)^2 + \frac{9}{16(r+2)^2} = \frac{35}{2}$$

Diğer taraftan $r + \dfrac{3}{4r+8} = t$ olursa $r + 2 + \dfrac{3}{4r+8} = t + 2$ ve

$$(r+2)^2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{16(r+2)^2} = (t+2)^2$$

Sonuç olarak $(t+2)^2 = 19$ olur. t pozitif olduğundan $t = \sqrt{19} - 2$.

20. $2, 3, \ldots, 2011$ tam sayılarından kaç tanesi karekökünden küçük olan en büyük tam sayı ile bölünür?

Cevap: 88. Şartı sağlayan bir sayı n olsun. $n = k^2$ olacak şekilde k pozitif tam sayısı varsa $k-1|n = k^2$ olmalı. $\Rightarrow k-1|k^2-(k-1)(k+1) = 1 \Rightarrow k = 2$. Demek ki $n = k^2$ ise $n = 4$ olmalı. Diğer durumda $k^2 < n < (k+1)^2$ olacak şekilde k pozitif tam sayısı vardır. $\Rightarrow k|n$ olmalı. $\Rightarrow n = k^2+k$ veya $n = k^2+2k$. $44^2+44 = 1980 < 2011 < 44^2+2\cdot 44 = 2024$ olduğundan toplam çözüm ssayısı $1+2\cdot 43+1 = 88$ dir.

21. $AB//CD$ olmak üzere, $ABCD$ yamuğunun tüm kenarlarına teğet olan bir çember $[AB]$ ye E, $[CD]$ ye de F noktasında değiyor. $|AE| = 5$, $|CF| = 3$ ve $|FD| = 2$ ise, $|BE|$ nedir?

Cevap: 10/3. Yamuğun kenarlarına teğet olan çemberin merkezi O olsun. $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ ve $AB \parallel CD$ olduğundan F, O, E doğrudaştır. $|BE| = x$ ve $|FE| = h$ olsun. Teğetliklerden $|AD| = 5+2 = 7$, $|BC| = x+3$ olmalıdır. D ve C noktalarından AB kenarına indirilen dikme ayakları sırasıyla P ve Q olsun. $|AP| = 3$, $|QB| = x-3$, $|DP| = |CQ| = h$ olur. Pisagor teoreminden $h^2+3^2 = 7^2$ ve $h^2+(x-3)^2 = (x+3)^2$ buluruz. Buradan da $h = 2\sqrt{10}$ ve $x = 10/3$ elde ederiz.

22. $pqr = 2pr + qr + 10p$ eşitliğini sağlayan kaç (p, q, r) asal sayılar üçlüsü vardır?

Cevap: 2. $pqr = 2pr + qr + 10p \Rightarrow qr(p-1) = 2p(r+5)$. Sağ taraf p ile bölünür. $p-1$ sayısı p ile bölünmediğinden ve p asal sayı olduğundan $p|qr$ dir ve dolayısıyla q ve r de asal sayılar olduğundan $p = q$ veya $p = r$ elde edilir.
$p = q$ ise, $r(p-1) = 2(r+5) \Rightarrow r(p-3) = 10 \Rightarrow r \in \{2, 5\}$. O halde bu durumdan sadece $(5, 5, 5)$ çözümü elde edilir.
$p = r$ ise, $q(p-1) = 2(p+5) \Rightarrow (q-2)(p-1) = 12$. Bu durumda farklı çözüm olarak yalnızca $(13, 3, 13)$ bulunur.

23. 4 siyah, 4 beyaz ve 4 kırmızı top, iki kırmızı top yan yana gelmemek koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilir?

Cevap: 8820. İlk önce beyaz ve siyah topları dizelim. Bundan sonra mavi topların gidebilecekleri yer sayısı 9 olduğundan cevap

$$\binom{8}{4} \cdot \binom{9}{4} = 8820$$

olur.

24. AB doğrusu üstünde ve B noktasına göre A ile farklı tarafta yer alan E noktasından geçen bir doğru $ABCD$ dikdörtgeninin $[BC]$ kenarını P, $[AD]$ kenarını da Q noktasında kesiyor. $|AB| = 1$, $|BE| = 3$, $|AD| = 5$ ve $PCDQ$ yamuğunun alanı $PQAB$ yamuğunun alanının iki katı ise, $|BP|$ nedir?

Cevap: 10/7. $|BP| = x$, $|QA| = y$ dersek $|PC| = 5 - x$, $|QD| = 5 - y$ olur. Alan$(PCDQ) = (5 - x + 5 - y)/2 = 5 - (x + y)/2$ ve Alan$(BPQA) = (x + y)/2$ olduğundan $x + y = 10/3$ olur. $BP \parallel QA$ olduğundan $x/y = |BE|/|AE| = 3/4$ ve buradan da $y = 4x/3$ olur. Yani $x + 4x/3 = 10/3$ ve buradan da $x = 10/7$ elde ederiz.

25. Kaç n tam sayısı için, $|n^3 - 6n^2 + 5|$ sayısı asaldır?

Cevap: 4. $n^3 - 6n^2 + 5 = (n - 1)(n^2 - 5n - 5)$ olduğundan bu iki çarpanın ± 1 olduğu durumları incelememiz gerekiyor. $n - 1 = \pm 1$ den $n = 0, 2$ gelir ve bu durumlarda $n^2 - 5n - 5$ ifadesi -5 ve -11 olur. $n^2 - 5n - 5 = \pm 1$ den $n = 6, -1$ gelir ve bu durumlarda $n - 1$ ifadesi 5 ve -2 olur. Buna göre, çözüm kümesi $\{0, 2, 6, -1\}$ olur.

26. $m \le k$ olmak üzere, 100×100 bir satranç tahtasının m birim karesine mavi, k birim karesine de kırmızı birer taş, hiçbir satır ya da sütunda farklı renkte iki taş yer almayacak biçimde yerleştirilmişse, m en çok kaç olabilir?

Cevap: 2500. Mavi taşlar x satırda ve y sütunda olsun. O zaman kırmızılar en fazla $100 - x$ satırda ve $100 - y$ sütunda olur. AO$\geq$GO eşitsizliğinden

$$mk \le xy(100 - x)(100 - y) \le x(100 - x)y(100 - y) \le 50^2 \cdot 50^2$$

ve $m \le 2500$ elde ederiz. $m = 2500$ için örnekte ilk 50 satırla ilk 50 sütunun kesişiminde 2500 tane mavi, son 50 satırla son 50 sütunun kesişiminde ise 2500 tane kırmızı taş bulunuyor.

27. E ve F, $ABCD$ dışbükey dörtgeninin sırasıyla, $[BC]$ ve $[AD]$ kenarları üstünde yer alan köşelerden farklı noktalar olmak üzere; hem A, B, E, F noktaları, hem de C, D, F, E noktaları çemberdeştir. $|AC| = 4$, $|AB| + |CD| = 5$ ve $s(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ ise, $|BD|$ nedir?

Cevap: $\sqrt{21}$. Çemberdeşliklerden $\angle DCE = \angle EFA = 180^\circ - \angle ABE$ olduğundan $AB \parallel CD$ olur. $ACKB$ paralelkenar olacak biçimde bir K

noktası alalım. D, C, K doğrudaştır. $|CK| = |AB|$ olduğundan $|DK| = |AB| + |CD| = 5$ ve $|BK| = |AC| = 4$ tür. Ayrıca $\angle DKB = \angle BAC = 60°$ olur. DKB üçgeninde kosinüs teoreminden $4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 60° = |BD|^2$ olduğundan $|BD| = \sqrt{21}$ elde ederiz.

28. Başlangıçta tahtada bir n tam sayısı yazılıdır. İki oyuncu sırayla hamle yaparak; her hamlede tahtadaki sayıyı silip yerine o sayıdan büyük olan, ama o sayının iki katını aşmayan bir tam sayı yazıyorlar. Tahtaya 2011 sayısını yazan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun $n = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 değerlerinin her biri için birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını oyuna başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 13. Oyun $[1006, 2010]$ aralağındaki sayılarla başlarsa oyuna başlayan oyuncu oyunu kazanır. Oyun 1005 sayısıyla başlarsa oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. Oyun $[503, 1004]$ aralağındaki sayılarla başlarsa oyuna başlayan oyuncu ilk hamlesinde tahtaya 1005 yazarak oyunu kazanır. Oyun 502 sayısıyla başlarsa oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. Oyun $[251, 501]$ aralağındaki sayılarla başlarsa oyuna başlayan oyuncu ilk hamlesinde tahtaya 502 yazarak oyunu kazanır. Oyun 250 sayısıyla başlarsa oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. Benzer şekilde devam edersek oyuna başlayan oyuncunun oyunu kaybettiği değerlerin 502, 250, 124, 61, 30, 14, 6, 2 olduğu görülür. Sonuç olatrak oyuna başlayan oyuncu ilk 16 pozitif tam sayıdan sadece 2, 6 ve 14 sayılarıyla başlayan oyunları kaybedecektir.

29. x, y, z, t gerçel sayılar olmak üzere, $x^2+y^2+z^2+t^2-xy-yz-zt-10t$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: -40. Verilen ifade

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{2z}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(z-\frac{3t}{4}\right)^2+\frac{5}{8}(t-8)^2-40$$

olarak yazılabilir. Buna göre verilen ifade -40 değerinden daha küçük olamaz ve $t = 8, z = 6, y = 4$ ve $x = 2$ durumunda -40 değerini alıyor.

30. Köşeleri bir çemberin üstünde yer alan $ABCD$ dışbükey dörtgeninin köşegenleri E noktasında kesişiyor. $|AC| = 16$, $|BD| = 12$ ve $\widehat{CED}$ açısının ölçüsü ile $\widehat{BC}$ yayının ölçüsünün toplamı $90°$ ise, çemberin yarıçapı nedir?

Cevap: 10. $\angle DEC = \alpha$, $\widehat{BC} = 90° - \alpha$ olsun. $\angle CAB = 45° - \alpha/2$ ve $\angle ABD = 135° - \alpha/2$ olur. CO doğrusu çemberi ikinci kez F de kessin. $\angle CAF = 90°$ olacağından $\angle FAB = \angle ABD$ olur. $FABD$ kirişler dörtgeni olduğundan $|FA| = |BD| = 12$ olur. FAC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|FC| = 20$ ve buradan da yarıçap 10 olur.