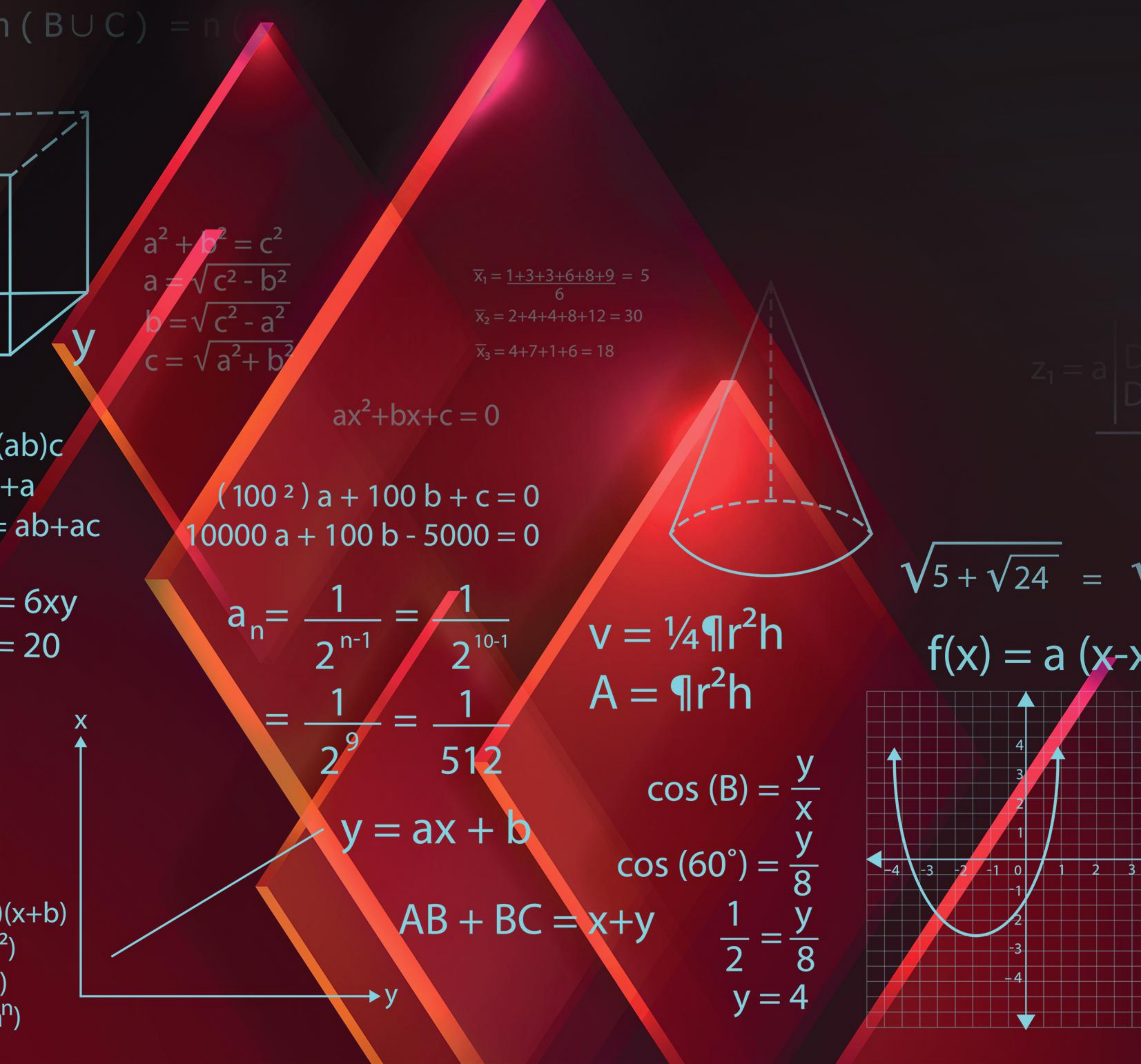
TÜBİTAK
Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

15. ULUSAL İLKÖĞRETİM MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAV SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2010



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Kendisi ile 1 fazlasının toplamı 3 ün bir kuvvetine eşit olan kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: Sonsuz çoklukta. Koşulları sağlayan sayı a olsun. O zaman negatif olmayan bir n tam sayısı için $a + a + 1 = 3^n$ ve buradan da $a = \dfrac{3^n - 1}{2}$ şeklinde sonsuz çözüm gelir.

2. 2010 dan küçük kaç n pozitif tam sayısı için, n nin rakamlarının toplamıyla aynı rakam toplamına sahip olan her m pozitif tam sayısı $m \geq n$ koşulunu sağlar?

Cevap: 28. Koşulları sağlayan sayılara *iyi* sayı diyelim. Tek basamaklı tüm pozitif tam sayılar iyi sayıdır. İki basamaklı iyi sayının basamaklarının toplamı en az 10 olmak zorundadır, aksi takdirde rakamlarının toplamı bu sayının rakamlarının toplamıyla aynı olan tek basamaklı sayı bulunacaktır. $10 \leq l \leq 18$ koşulunu sağlayan her l tam sayısı için rakamlarının toplamı l olan sadece bir iki basamaklı iyi sayı vardır. Üç basamaklı iyi sayının basamaklarının toplamı en az 19 olmak zorundadır, aksi takdirde rakamlarının toplamı bu sayının rakamlarının toplamıyla aynı olan iki basamaklı sayı bulunacaktır. $19 \leq l \leq 27$ koşulunu sağlayan her l tam sayısı için rakamlarının toplamı l olan sadece bir üç basamaklı iyi sayı vardır. Dört basamaklı iyi sayının basamaklarının toplamı en az 28 olmak zorundadır, aksi takdirde rakamlarının toplamı bu sayının rakamlarının toplamıyla aynı olan üç basamaklı sayı bulunacaktır. Buna göre 2010 dan küçük olan tek iyi sayı 1999 dur. Sonuç olarak cevap $9 + 9 + 9 + 1 = 28$ olur.

3. Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişim noktasının $[AC]$ kenarına uzaklığı 4 birimdir. ABC üçgeninin dışına doğru, $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarını taban alan ve yükseklikleri 2 birim olan ikizkenar üçgenlerin alanlarının toplamının ABC üçgeninin alanına oranı nedir?

Cevap: $\dfrac{1}{2}$. Yükseklikleri 2 olan ikizkenar üçgenlerin alanları toplamı, $\dfrac{|AB| + |BC| + |CA|}{2} = u$ dersek, $2 \cdot u$ olur. Diğer taraftan, iç açıortayların kesişim noktasının $[AC]$ kenarına uzaklığı ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı olan r ye eşittir. ABC nin alanı $u \cdot r$ olduğundan, istenilen oran $\dfrac{2 \cdot u}{u \cdot r} = \dfrac{2 \cdot u}{u \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$ olarak bulunur.

4. 1 saatte en fazla 3 km yüzen bir balık 15 km lik bir mesafeyi t saatte yüzdüyse, 4, 17/4, 9/2, 23/5, 19/4, 5 değerlerinden kaçı t tarafından alınabilir?

Cevap: 5. Balık saatte 3 km sabit hızla yüzerse, 5 saatte 15 km yüzecektir. $t = 19/4 = 4.75$ için, balık ilk 0.75 saatte 3 km yüzüp daha sonraki 0.25 saatte dinlenirse, her saatte 3 km yüzmüş olacak ve 19/4 saatte 15 km yüzecektir. $t = 23/5 = 4.6$ için, balık ilk 0.6 saatte 3 km yüzüp daha sonraki 0.4 saatte dinlenirse, her saatte 3 km yüzmüş olacak ve 23/5 saatte 15 km yüzecektir. $t = 9/2 = 4.5$ için, balık ilk 0.5 saatte 3 km yüzüp daha sonraki 0.5 saatte dinlenirse, her saatte 3 km yüzmüş olacak ve 9/2 saatte 15 km yüzecektir. $t = 17/4 = 4.25$ için, balık ilk 0.25 saatte 3 km yüzüp daha sonraki 0.75 saatte dinlenirse, her saatte 3 km yüzmüş olacak ve 17/4 saatte 15 km yüzecektir. $3 \cdot 4 = 12 < 15$ olduğundan 4 değeri t tarafından alınamaz.

5. n tam sayı olmak üzere, $n/21$ sayısı $5/14$ ile $5/12$ arasında ise, n nedir?

Cevap: 8. $5/14 < n/21 < 5/12$ olduğuna göre, $7.5 < n < 8.75$ ve buradan da $n = 8$ gelir.

6. Çevreleri 35 ve 36 birim olan iki çemberin yarıçapları arasındaki fark kaç birimdir?

Cevap: $\dfrac{1}{2\pi}$. Çemberlerin yarıçaplarına sırasıyla r_1 ve r_2 dersek, $2\pi \cdot r_1 = 35$ ve $2\pi \cdot r_2 = 36$ olduğundan, $r_2 - r_1 = \dfrac{36}{2\pi} - \dfrac{35}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$ olur.

7. $10 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 99$ tam sayılarının herhangi ikisi aralarında asal ise, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 25. Sayılardan herhangi ikisi aralarında asal olduğundan her sayı için sadece bu sayıyı bölen bir asal sayı vardır. 99 dan büyük olmayan 25 asal sayı bulunuyor. Buna göre, cevap en fazla 25 olabilir. 25 için örnek: $2^4, 3^3, 5^2, 7^2$,11,13,17,19,23,29,31,37,41,42,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

8. On tabanına göre yazılımındaki rakamların karelerinin toplamı asal sayı olan kaç tane iki basamaklı asal sayı vardır?

Cevap: 5. 11 sayısı koşulları sağlıyor. Diğer iki basamaklı sayıların ilk basamakları çift sayı olmak zorundadır. Buna göre toplam 5 sayı vardır: 11,23,41,61,83.

9. $AB//CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda, $|AB| = 2$, $|CD| = 3$, $|BD| = 5$ ve $s(\widehat{ABD}) = 60^o$ ise, $|AC|$ kaçtır?

Cevap: 5. $[DC$ ışını üzerinde $|DE| = 5$ olan E noktasını alalım. $CE \parallel AB$ ve $|CE| = 2 = |AB|$ olduğundan $ABEC$ paralelkenar olup, $|BE| = |AC|$ olur. Diğer taraftan, $AB \parallel CD$ olduğundan $s(\widehat{BDE}) = s(\widehat{ABD}) = 60°$ olur. Sonuç olarak, $|BD| = |DE|$ ve $s(\widehat{ABD}) = 60°$ olması BDE üçgeninin eşkenar olduğunu gösterir. Buradan $|AC| = |BE| = |BD| = 5$ olur.

10. Ayşe 165 sayfalık bir kitabı bazı günler 3 sayfa, bazı günler 6 sayfa ve bazı günler de 30 sayfa okuyarak 9 günde bitiriyor. Ayşe kaç gün 30 ar sayfa okumuştur?

Cevap: 5. Ayşe'nin 3,6 ve 30 sayfa okuduğu gün sayısı, sırasıyla x, y ve z olsun. O zaman $3x + 6y + 30z = 165$ ve $x + y + z = 9$ olur. İlk denklemde $x = 9 - y - z$ yazarsak $y + 9z = 46$ elde ederiz. Buna göre z in alabileceği en büyük değer 5 olur. z in daha küçük değerlerinde $y + z \geq 14$ çelişkisi gelir. Demek ki tek çözüm vardır: $(x, y, z) = (3, 1, 5)$.

11. A, B, C, D, E, F farklı rakamları belirtmek üzere, ilk beş teriminin on tabanına göre yazılımları sırasıyla, A, BC, BD, CE, FF olan bir aritmetik dizinin altıncı terimi nedir?

Cevap: 40. Aritmetik dizinin ortak farkı t olsun. BC ve BD ardışık elemanlar olduklarına göre $t \leq 9$. O zaman A ve BC ardışık elemanlar olduklarına göre $B = 1$ olur. Şimdi de BD, CE, FF ardışık elemanlar olduklarına göre $C = 2$ ve $F = 3$ olur. Demek ki $FF - BC = 33 - 12 = 3t$ olduğundan $t = 7$ gelir. Sonuç olarak altıncı terim $33 + 7 = 40$ olur.

12. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişme noktası E olmak üzere, $s(\widehat{AED}) = s(\widehat{BAD}) = 90^o$, $|BE| = |EC|$ ve $|AB| = \sqrt{14}$ ise, BDC üçgeninin alanı kaçtır?

Cevap: 7. BAD dik üçgeninde $[AE]$, hipotenüse inen yükseklik olduğundan, Öklit teoreminden $|BE| \cdot |BD| = |AB|^2 = 14$ olarak bulunur. Diğer taraftan, $CE \perp BD$ olduğundan BDC üçgeninin alanı $\dfrac{|BD| \cdot |EC|}{2}$ olarak hesaplanabilir. $|BE| = |EC|$ eşitliğinden, BDC üçgeninin alanı $\dfrac{14}{2} = 7$ olur.

13. Kaç (a, b) pozitif tam sayı ikilisi için 2^{2010} sayısı $ab(a^2+b^2)$ sayısı ile bölünür?

Cevap: 503. a ve b nin 2 dışında böleni olamaz. $k < n$ olmak üzere, $a = 2^k$ ve $b = 2^n$ olursa, $a^2 + b^2 = 2^{2k}(1 + 2^{2n-2k})$ sayısının tek sayı olan bir çarpanı bulunur, çelişki. $a = b = 2^k$ durumunda $2^{4k+1} | 2^{2010}$ olduğundan $0 \leq 4k+1 \leq 2010$ olur. Buna göre $0 \leq k \leq 502$ ve k sayısının alabileceği farklı değer sayısı 503 olur.

14. Hızı durgun suda 18 km/saat olan motorlu bir tekne ile nehrin akışına ters yönde 40 dakikada gittiğimiz mesafeyi, dönüşte motoru çalıştırmayıp tekneyi akıntıya bırakarak 50 dakikada geliyorsak, akıntının hızı kaç km/saat tir?

Cevap: 8. Teknenin nehrin akışına ters yönde 40 dakikada gittiğimiz mesafe L ve nehrin hızı v olsun. O zaman

$$50 \cdot \frac{L}{18 - v} = 40 \cdot \frac{L}{v}$$

olur. Buradan $v = 8$ gelir.

15. Merkezleri aynı, yarıçapları farklı olan üç düzlemdeş çemberden büyüğüyle ortancası arasında kalan alan S_1, ortancası ile küçüğü arasında kalan alan da S_2 olsun. Ortanca çemberin küçük çembere teğet olan bir kirişinin uzunluğu 4 birim, büyük çemberin ortanca çembere teğet olan bir kirişinin uzunluğu da 10 birimdir. $S_1 - S_2$ kaç birim karedir?

Cevap: 21π. Çemberlerin yarıçapları küçükten büyüğe doğru sırasıyla r_1, r_2, r_3 olsun. $S_1 = \pi(r_3^2 - r_2^2)$ ve $S_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, çemberlerin ortak merkezinden, ortanca çemberin küçük çembere teğet olan kirişine inen dik, bu kirişi iki eş parçaya böler ve kenar uzunlukları 2, r_1 ve r_2 olan bir dik üçgen oluşturur. Dolayısıyla $r_2^2 - r_1^2 = 2^2 = 4$ bulunur. Benzer şekilde $r_3^2 - r_2^2 = 5^2 = 25$ olur. Sonuç olarak, $S_1 - S_2 = 21\pi$ elde edilir.

16. Bir manav aldığı domateslerin 1/6 sını bozuk çıktığı için çöpe atıp geri kalanları da satıyor. Bu durumda %25 kâr ettiğine göre, bozuk domatesleri atmayıp aynı fiyattan satabilseydi, yüzde kaç kâr ederdi?

Cevap: 50. Bozuk domates çıkmadığı durumlarda manavın satıştan elde ettiği paranın domateslere harcadığı paraya oranı s olsun. O zaman $5/6 \cdot s = 1.25$ ve buradan da $s = 1.5$. Demek ki manav bozuk domatesleri atmayıp aynı fiyattan satabildiği durumda yüzde %50 kâr ederdi.

17. On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 3 ile bölünen kaç yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 3000. Sayımıza *abcdcba* diyelim. Bu sayı 3 ile bölüneceğinden, b, c, d rakamlarının alacağı her bir değer için, a rakamının 3 modundaki değeri diğer üç rakama göre tek türlü belli olur. Ek olarak, a rakamı 0 olamayacağından, 3 modundaki değeri belli ise a rakamı için tam olarak 3 seçenek vardır. Sonuç olarak, $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 = 3000$ pozitif tam sayı vardır.

18. $s(\widehat{BAC}) = 90^o$ ve $|AC| = 12$ olan bir ABC üçgeninde, D noktası $[AB]$ kenarı, E noktası $[BC]$ kenarı üstünde, $s(\widehat{EDC}) = 90^o$ ve $|CD| = 2|DE| = 2|BE|$ ise, $|DB|$ kaçtır?

Cevap: 12. E noktasından BD ye indirilen dikme ayağı F olsun. BED üçgeni ikizkenar olduğundan $|DB| = 2|DF|$ olur. Diğer taraftan, $s(\widehat{EDC}) = 90°$ ve $s(\widehat{DAC}) = 90°$ olduğundan, $s(\widehat{EDF}) = s(\widehat{DCA})$ bulunur. Dolayısıyla EFD ve DAC üçgenleri benzer olur. Benzerlik oranı $|ED| : |DC| = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, $|DB| = 2|DF| = |AC| = 12$ olur.

19. Aşağıdaki (A, B) ikililerinden hangisi için

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= A \\ \frac{y}{x} &= B \end{aligned}$$

denklem sisteminin gerçel çözümü yoktur?

a) $(1, -2)$ b) $(\sqrt{3}, 1)$ c) $(1, 0)$ d) $(1/3, -1/2)$ e) $(-2, -2)$

Cevap: $(1, -2)$. Verilen eşitliklerden $A = x(x + y)$ ve $1 + B = \dfrac{x+y}{y}$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla $A(1 + B) = (x + y)^2 \geq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan, $A(1 + B) \geq 0$ ve $A \neq 0, B \neq -1$ için, $x = \sqrt{\dfrac{A}{1+B}}$ ve $y = B\sqrt{\dfrac{A}{1+B}}$

olduğunda eşitliklerin sağlandığı görülebilir. Buradan (A, B) ikilisinin sadece $(1, -2)$ olamayacağı elde edilir.

20. 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayının on tabanına göre yazılımındaki rakamların toplamı 5 ile bölünür?

Cevap: 401. 2010 dan küçük pozitif tamsayıları $G_1 = \{10, 11, \ldots, 19\}$, $G_2 = \{20, 21, \ldots, 29\}$, $G_3 = \{30, 31, \ldots, 39\}$, $\ldots$, $G_{200} = \{2000, 2001, \ldots, 2010\}$ olacak şekilde 200 gruba ayıralım. Bu grupların her birinde rakamlarının toplamı 5 ile bölünen iki sayı vardır. Buna göre cevap 400+1=401 olur.

21. E ve F noktaları bir $ABCD$ karesinin sırasıyla, $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üstündedir. AF ve DE doğrularının kesişim noktası G olmak üzere, $|FD| = 3$, $|EB| = 1$ ve $|EF| = \sqrt{10}$ ise, $|GF|$ kaçtır?

Cevap: $\frac{9}{5}$. Öncelikle $|CF| = a$ dersek, $ABCD$ karesinin bir kenarının uzunluğu $3 + a$ olacağından $|EC| = a + 2$ elde ederiz. ECF dik üçgeninde Pisagor teoremini kullanırsak $a^2 + (a + 2)^2 = 10$ ve dolayısıyla $a = 1$ bulunur. $|EC| = |DF|$ olduğundan ADF ve DCE üçgenleri eş olup, buradan $s(\widehat{EDC}) = s(\widehat{FAD}) = 90° - s(\widehat{AFD})$ ve dolayısıyla $AF \perp DE$ bulunur. Sonuç olarak, DGF ve DCE üçgenleri benzer olup, $\frac{|GF|}{|CE|} = \frac{|DF|}{|DE|}$ elde ederiz. ECD dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|ED| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ olduğundan, $|GF| = \frac{|CE| \cdot |DF|}{|DE|} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5}$ bulunur.

22. 7 günlük bir yaz kampına katılan 100 öğrencinin her birine dolaşsın diye her gün bir bisiklet veriliyor. Her bisiklet kamp boyunca en çok 6 gün kullanılabiliyorsa, bu kampta en az kaç bisiklet bulunması gerekir?

Cevap: 117. Bisiklet sayısının en az 100 olması gerekiyor. Buna göre, en az bir gün en az $\lceil \frac{100}{7} \rceil = 15$ bisiklet kullanılmayacaktır. O zaman bisiklet sayısının en az 115 olması gerekiyor. O zaman benzer şekilde en az bir gün en az $\lceil \frac{115}{7} \rceil = 17$ bisiklet kullanılmayacaktır. Sonuç olarak bisiklet sayısının en az 117 olması gerekiyor. 117 bisiklet yeterlidir. 1. gün 1-17, 2. gün 18-34, 3. gün 35-51, 4. gün 52-68, 5. gün 69-85, 6. gün 86-102 ve 7. gün 103-117 ve 1 numaralı bisikletler dışındaki tüm bisikletler kullanılırsa, koşullar sağlanmış olur.

23. m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?

a) 2007 b) 2008 c) 2009 d) 2010 e) 2011

Cevap: 2010. Verilen eşitliği mod 4 te incelersek $m \equiv z^2 - x^2$ olur. Bir tam kare mod 4 te sadece 0 veya 1 olabileceğinden $m \not\equiv 2 \pmod 4$ olur. Dolayısıyla $m \neq 2010$ olur. Diğer seçenekler için,

- $m = 2007$ ise, $x = 1$, $y = 1$, $z = 20$ sağlar.
- $m = 2008$ ise, $x = 1$, $y = 20$, $z = 9$ sağlar.
- $m = 2009$ ise, $x = 6$, $y = 18$, $z = 11$ sağlar.
- $m = 2011$ ise, $x = 13$, $y = 14$, $z = 12$ sağlar.

24. E ve F noktaları bir $ABCD$ yamuğunun sırasıyla, $[AB]$ ve $[CD]$ tabanları üzerinde olmak üzere, EC ve BF doğruları M noktasında, AF ve DE doğruları da N noktasında kesişiyor. CBM üçgeninin alanı 4 birim kare ve DAN üçgeninin alanı 9 birim kare ise, $MFNE$ dörtgeninin alanı kaç birim karedir?

Cevap: 13. $A[XYZ]$ ile XYZ üçgeninin alanını gösterelim. $AE \parallel DF$ olduğundan, AFD ve EDF üçgenleri tabanları aynı ve yükseklikleri eşit olan iki üçgen olur. Dolayısıyla bu iki üçgenin alanları eşittir. Ek olarak, $A[AFD] = A[DAN] + A[DNF]$ ve $A[EDF] = A[ENF] + A[DNF]$ olduğundan, $A[ENF] = A[DAN] = 9$ elde ederiz. Benzer şekilde, $A[EMF] = A[CBM] = 4$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan, $A[MFNE] = A[EMF] + A[ENF] = 13$ olur.

25. Başlangıçta $m \times n$ bir satranç tahtasının sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırayla hamle yaparak, her hamlede taşı sağa veya yukarı doğru en az bir kare kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun, 13×22, 14×14, 22×24, 15×17 ve 29×29 tahtalarda birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

Cevap: 3. Oyun $n \times n$ satranç tahtasında oynanırsa, ikinci oyuncu kendi hamlesinde taşı her zaman sağ üst köşeden geçen köşegene taşıyarak oyunu kazanır. Başka bir deyişle, ilk oyuncu taşı k birim sağa kaydırırsa ikinci oyuncu taşı k birim yukarı, ilk oyuncu taşı k birim yukarı kaydırırsa da ikinci oyuncu taşı k birim sağa kaydırır. Böylelikle hamle yapamaz konuma gelen kişi mutlaka birinci oyuncu olur ve ikinci oyuncu oyunu kazanmayı garantiler.

Diğer durumlarda birinci oyuncu ilk hamlesini tahtanın oyun için kalan kısmı kare olacak şekilde yaparak oyunu kazanır. Diğer bir deyişle, birinci oyuncu ilk hamlesinde taşı sağ üst köşeden geçen köşegen üzerine taşır ve dolayısıyla kendisi $n \times n$ bir tahtada oynanan oyunda ikinci oyuncu durumuna geçer. Böylelikle, kare tahtada ikinci oyuncunun kazanma stratejisini uygulayarak oyunu kazanır.
Sonuç olarak, oyun $m \times n$ bir tahtada oynanmak üzere, $m = n$ ise ikinci, $m \neq n$ ise birinci oyuncu kazanma stratejisine sahiptir.

26. $1 \leq a, b, c \leq 100$ koşulunu ve

$$\begin{aligned} (a+b)\,c &= 10a^2 \\ c^2 &= ab \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (a, b, c) tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 25. Verilen ilk eşitlikte iki tarafın karesini alıp, c^2 yerine ab yazarsak, $(a+b)^2 ab = 100a^4$ olur. m ve n aralarında asal sayılar olmak üzere, $a = dm$ ve $b = dn$ yazalım. Buradan $(m+n)^2 n = 100m^3$ elde ederiz. Son eşitlikten, m sayısının $(m+n)^2 n$ sayısını bölmesi gerekir, fakat hem $(m+n)^2$ hem de n ile aralarında asal olduğundan $m = 1$ sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla $(n+1)^2 n = 100$ ve $(n-4)(n^2+6n+25) = 0$ elde ederiz, bu da $n = 4$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $a = d$, $b = 4d$ ve $c = 2d$ olup, bu değerler soruda verilen iki eşitliği sağlamaktadır. $1 \leq a, b, c \leq 100$ koşulu ise, $1 \leq d \leq 25$ demektir, buradan 25 tane (a, b, c) tam sayı üçlüsü elde ederiz.

27. $s(\widehat{BAC}) = 67,5^o$ olan bir ABC üçgeninde C köşesine ait yüksekliğin ayağı H olmak üzere, $|AB| = \sqrt{2}\,|CH|$ ise, $s(\widehat{HCB})$ kaçtır?

Cevap: 45°. $[HC]$ üzerinde $|AH| = |HD|$ şartını sağlayan D noktasını alalım. $s(\widehat{HAD}) = 45°$ olduğundan $s(\widehat{DAC}) = s(\widehat{DCA}) = 22,5°$ elde ederiz. $|DC| = |DA| = \sqrt{2}|AH| = \sqrt{2}|HD|$ olduğundan, $|HC| = (\sqrt{2}+1)|AH|$ olur. Soruda $|AB| = \sqrt{2}|HC|$ verildiğinden,

$$|HB| = |AB| - |AH| = |HC| \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = |HC|$$

elde ederiz. Dolayısıyla $s(\widehat{HCB}) = 45°$ olur.

28. $2x^2 + 17xy + 35y^2 = 315$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 8. Öncelikle $2x^2+17xy+35y^2=(x+5y)(2x+7y)$ ve $315=3^2\cdot 5\cdot 7$ olduğu görülebilir. Burada $x+5y$ ve $2x+7y$ sayılarından en az biri 3 ile bölünmelidir, ek olarak bu sayıların toplamı da $3(x+4y)$ olup 3 ile bölünür. Dolayısıyla, iki sayının ikisi de 3 ile bölünmelidir. $x+5y=3m$ ve $2x+7y=3n$ dersek, $x=5n-7m$, $y=2m-n$ ve $mn=5\cdot 7$ elde ederiz. $mn=5\cdot 7$ şartını sağlayan 8 tane (m,n) tam sayı ikilisinden her biri için tam olarak bir tane (x,y) çözümü gelir.

29.
$$\begin{aligned} x^2+xy &= 2y^2 \\ y^2-xy &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x,y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. İkinci denklemden $x=y-1/y$ elde edip bunu birinci denkleme yazarsak
$$y^2-2+\frac{1}{y^2}+y^2-1=2y^2$$
olur ve buradan da $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ gelir. Sonuç olarak iki (x,y) çözüm ikilisi elde edilir: $(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ ve $(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

30. A ve B noktalarından geçen bir çembere A da teğet olan doğru ile AB doğrusuna B de dik olan doğru C noktasında kesişiyor. $|AB|=|BC|$ ise, ABC üçgeninin çemberin dışında kalan alanının çemberin içinde kalan alanına oranı nedir?

Cevap: $\dfrac{6-\pi}{\pi-2}$. A ve B noktalarından geçen çemberin merkezi O, yarıçapı R olsun. CB doğrusunun O merkezli çember ile ikinci kesişim noktasına D diyelim. $s(\widehat{ABD})=90°$ olduğundan A, O, D doğrudaş olur. Diğer taraftan, $|AB|=|BC|$ olduğundan, $s(\widehat{ACB})=s(\widehat{BAC})=45°$ olur. $OA\perp AC$ olduğundan $s(\widehat{ADB})=45°$ olur. Buradan, $s(\widehat{AOB})=90°$ olduğu görülür. ABC üçgeninin çemberin dışında kalan alanına T ve çemberin içinde kalan alanına S dersek,
$$S=\frac{\pi R^2}{4}-A[AOB]=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=R^2\left(\frac{\pi-2}{4}\right)\ \text{ve}$$
$$T=A[ABC]-S=2\cdot A[AOB]-S=R^2-R^2\left(\frac{\pi-2}{4}\right)=R^2\left(\frac{6-\pi}{4}\right)$$
olduğu görülür. Dolayısıyla $\dfrac{T}{S}=\dfrac{6-\pi}{\pi-2}$ olur.